

---

## CONCOURS ALPHA

### MATHEMATIQUES ET RAISONNEMENT LOGIQUE

<b>Durée de l'épreuve</b>	2h00
<b>Candidats de Terminale concernés</b>	STAV ; STI2D ; STL
<b>Nombre de questions du sujet</b>	60
<b>Nombre de réponses attendues</b>	50

#### Consignes à lire avant de répondre aux questions

Cette épreuve comporte trois parties indépendantes que vous pouvez traiter dans l'ordre de votre choix :

- Partie 1 : 10 questions de raisonnement logique à traiter par tous les candidats ;
- Partie 2 : 20 questions du programme de Mathématiques à choisir parmi 30 posées ;
- Partie 3 : 20 questions sur la base d'un mini-cours présentant une notion nouvelle.

**Chaque candidat devra répondre correctement à 50 questions pour pouvoir obtenir la note maximale parmi :**

- **10 questions de la partie 1 ;**
- **20 questions de la partie 2 ;**
- **20 questions de la partie 3.**

Pour chacune des questions posées, plusieurs réponses vous sont proposées et une seule est exacte. Vous devrez reporter votre choix sur la grille de réponse qui vous est fournie en début d'épreuve :

- Toute bonne réponse vous apporte deux points (+2 points) ;
- Toute mauvaise réponse vous retire un point (-1 point) ;
- Toute non réponse ou annulation de réponse ne vous rapporte et ne vous enlève aucun point (0 point).

L'usage de la calculatrice ou de tout autre moyen de communication est interdit.

Il ne vous sera fourni qu'une seule grille de réponse pour l'épreuve. En cas d'erreur sur votre choix de réponse, vous pouvez modifier ce dernier selon les consignes présentées en page 2.

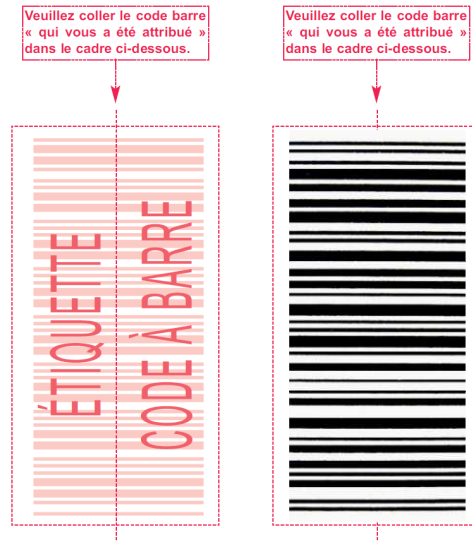
Néanmoins, en cas de force majeure, une seconde feuille pourra vous être fournie par un surveillant.

## Instructions importantes pour remplir la grille de réponse

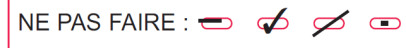
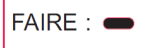
Les réponses aux questions doivent être reportées sur la grille de réponse qui vous a été remise en début d'épreuve. Cette grille sera corrigée automatiquement. Afin que vos résultats puissent être pris en compte, nous vous demandons de respecter scrupuleusement les consignes ci-dessous :

### Identification de votre grille de réponse

- Veillez à reporter votre identité dans l'emplacement réservé à cet effet en haut de la grille de réponse ;
- Collez sur votre grille de réponse le code barre qui vous a été remis en début de journée selon le modèle ci-contre. Le code-barres doit être collé dans le sens vertical.
- N'oubliez pas de renseigner l'intitulé de l'épreuve en noircissant la case correspondante au milieu de votre grille de réponse.



- Pour renseigner vos réponses, utilisez un **stylo bille** ou une **pointe de feutre de couleur noire ou bleue** selon la consigne ci-dessous :



- Ne pas raturer votre réponse, ne pas tenter de gommer ou d'utiliser d'effaceur sur votre grille de réponse ;
- Ne pas froisser ou plier votre grille de réponse.

### Modifier votre réponse

- Chaque case de réponse dispose de deux lignes. Vous devez renseigner votre réponse sur la première ligne de la case. Si vous souhaitez modifier votre réponse, renseignez votre nouveau choix sur la deuxième ligne de la case comme indiqué sur l'exemple ci-dessous.



Réponse A



Réponse C

### Annuler votre réponse ou ne pas répondre

- Pour annuler totalement votre réponse à une question (première ligne et deuxième ligne) vous devez cocher la case « Annul. » qui se situe sous le numéro de la question.
- Si vous souhaitez ne pas répondre à une question, il n'est pas nécessaire de cocher de case



Réponse Annulée



Non réponse

## Partie I Raisonnement logique

- Toutes les questions de cette partie sont obligatoires
- Toutes les questions de cette partie sont indépendantes

### Question 1.

Un touriste regardant Big Ben à 6h pile se rend compte qu'il sonne pendant 5 secondes.

Combien de temps (en secondes) mettra-t-il pour sonner midi ?

- a- 10  
b- 11  
c- 12  
d- 13

### Question 2.

En multipliant par 5 l'âge qu'il avait il y a 10 ans, Mathieu obtient l'âge qu'il aura dans 6 ans.

Quel est l'âge de Mathieu?

- a- 22  
b- 19  
c- 15  
d- 14

### Question 3.

Deux randonneurs marchant à 5 km/h partent en même temps sur le sentier des douaniers, l'un partant de Quiberon, l'autre de Lorient, soit une distance de 50 km. Ça amuse beaucoup une mouche volant à 30km/h de passer d'un randonneur à l'autre.

Combien de kilomètres aura parcouru la mouche lorsque les deux randonneurs se rencontreront?

- a- 140 km  
b- 150 km  
c- 160 km  
d- 170 km

### Question 4.

Julie, Karine et Léo portent des coiffures différentes : chapeau, casquette et béret. Ils portent des chaussures différentes : espadrilles, souliers et bottes.

1. Julie n'a pas de casquette et ne porte pas d'espadrilles.
2. Karine a une casquette ou un chapeau et n'a pas de souliers.
3. Léo a des souliers ou des espadrilles et ne porte pas de chapeau.
4. La personne qui porte des bottes a un béret.

Trouver la coiffure et les chaussures de chacun.

a-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	béret	chapeau	casquette
Chaussures	bottes	espadrilles	souliers

b-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	casquette	chapeau	béret
Chaussures	Souliers	espadrilles	bottes

c-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	béret	casquette	chapeau
Chaussures	espadrilles	souliers	bottes

d-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	casquette	béret	chapeau
Chaussures	bottes	espadrilles	souliers

### Question 5.

Au mont Blanc se trouve un télésiège. Au moment où le siège n° 95 croise le siège n° 105, le n°240 croise le n°230. On sait que les sièges sont régulièrement espacés et numérotés dans l'ordre à partir du n°1.

Combien de sièges composent ce télésiège?

- a- 255  
b- 260  
c- 270  
d- 280

### Question 6.

1) Prenez d'abord :

1 kilogrammes = 1000 grammes et 2 kilogrammes = 2000 grammes

2) Multiplions chaque masse en kilo entre elles puis de même pour celles en grammes. On a donc l'égalité :  $1 \times 2 \text{ kg} = 1000 \times 2000 \text{ g}$

3) Ce qui fait donc :  $2 \text{ kg} = 2000000 \text{ g}$

4) Soit plus exactement en changeant d'unité  $2 \text{ kg} = 2000 \text{ g}$

Où est l'erreur ?

- a- Etape 1  
b- Etape 2  
c- Etape 3  
d- Etape 4

### Question 7.

On pense que les égyptiens de la haute antiquité transportaient les pierres servant à bâtir les pyramides en les faisant rouler sur des rondins de bois. Soit une pierre de 10m de long sur 1m de large, posée sur 10 rondins. Chaque rondin fait exactement un mètre de circonférence.

Lorsque les rondins auront parcouru 1m, quelle distance aura parcouru la pierre (en mètres)?

- a- 1  
b- 2  
c- 3.14  
d- 6.28

### Question 8.

Un scientifique décide de mesurer la taille d'un cercle à l'aide d'une boussole et d'un mètre très précis. Pour cela, il se met à un point quelconque du cercle et se dirige vers le nord jusqu'à un autre point du cercle. Il parcourt de cette façon 30 mètres.

Il répète ensuite ce procédé vers l'ouest et parcourt 40 mètres.

Quel est le diamètre du cercle en mètres?

- a- 27.18m  
b- 32m  
c- 47.34m  
d- 50m

**Question 9.**

Trouver, parmi les solutions proposées, celle qui peut s'intégrer à la fois à l'ensemble vertical et à l'ensemble horizontal.

KST	KAF	FLM	KCD	OFG
	?			
	UFK			
	KFS			
	FLK			

- |        |        |
|--------|--------|
| a- FJK | c- KUV |
| b- AFK | d- EFG |

**Question 10.**

Chacune des trois phrases cherchées utilise les mots suivants qui sont pris chacun une seule fois.

Premiers mots : Mon, Son, Ton  
Deuxièmes mots : léopard, lion, tigre  
Troisièmes mots : court, marche, se repose

1. Le tigre ne m'appartient pas et il se déplace.
2. Le léopard ne t'appartient pas et il ne court pas.
3. L'animal qui t'appartient marche.
4. L'animal qui se repose lui appartient.

Écrire chacune des phrases.

- |    |               |           |           |           |
|----|---------------|-----------|-----------|-----------|
| a- | Premier mot   | mon       | son       | ton       |
|    | Deuxième mot  | lion      | léopard   | tigre     |
|    | Troisième mot | court     | se repose | marche    |
| b- | Premier mot   | mon       | son       | ton       |
|    | Deuxième mot  | tigre     | lion      | léopard   |
|    | Troisième mot | marche    | court     | Se repose |
| c- | Premier mot   | mon       | son       | ton       |
|    | Deuxième mot  | lion      | léopard   | tigre     |
|    | Troisième mot | se repose | marche    | court     |
| d- | Premier mot   | mon       | son       | ton       |
|    | Deuxième mot  | tigre     | lion      | léopard   |
|    | Troisième mot | se repose | marche    | court     |



**Question 17.**

Le complexe  $z = \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}\right)^{2014}$  a pour module :

- a- 2014                      b-  $\frac{2 \times 2014 \pi}{7}$                       c- **1**                      d-  $\left(\frac{2}{7}\right)^{2014}$

**Question 18.**

L'équation  $(1 - i)z = z + \frac{1}{i}$  a pour solution :

- a-  **$S = \{1\}$**                       b-  $S = \{-1\}$                       c-  $S = \{1 + i\}$                       d-  $S = \{\frac{1}{i}\}$

**Question 19.**

Le complexe  $z = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$  a pour argument :

- a-  $-\frac{2\pi}{3} [2\pi]$                       b-  **$\frac{\pi}{6} [2\pi]$**                       c-  $\frac{3\pi}{4} [2\pi]$                       d-  $\frac{5\pi}{6} [2\pi]$

**Question 20.**

Le complexe  $z = \frac{4e^{\frac{i\pi}{12}}}{2e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$  a pour carré :

- a-  **$4e^{\frac{5i\pi}{3}}$**                       b-  $4e^{\frac{-4i\pi}{3}}$                       c-  $8e^{\frac{5i\pi}{3}}$                       d-  $8e^{\frac{-4i\pi}{3}}$

**Question 21.**

L'équation différentielle  $y'' + \frac{1}{4}y = 0$   
vérifiant les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -2$  a pour solution :

- a-  $y = \cos 2t + \sin 2t$                       c-  $y = \cos 2t - \sin 2t$   
b-  $y = \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}$                       d-  **$y = \cos \frac{t}{2} - 4 \sin \frac{t}{2}$**

**Question 22.**

L'équation différentielle  $y' - 2y = 6$  vérifiant la condition initiale  $y(0) = 2$  a pour solution :

- a-  $y = 5e^{2x} + 3$                       b-  **$y = 5e^{2x} - 3$**                       c-  $y = 5(e^{-2x} + 3)$                       d-  $y = 5(e^{-2x} - 3)$

**Question 23.**

$\ln 9 - 2 \ln \frac{1}{3} =$

- a-  **$4 \ln 3$**                       b- 0                      c-  $-\ln 3$                       d-  $2 \ln 3$

**Question 24.**

L'équation  $\ln(2x - 1) = 1$  a pour solution

- a-  $\mathcal{S} = \{1\}$       b-  $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$       c-  $\mathcal{S} = \left\{\frac{e+1}{2}\right\}$       d-  $\mathcal{S} = \emptyset$

**Question 25.**

La fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$  a pour dérivée

- a-  $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$       b-  $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$       c-  $f'(x) = \frac{2}{x}$       d-  $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

**Question 26.**

Une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \ln x$  est  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

- a-  $F(x) = \frac{1}{x}$       b-  $F(x) = x \ln x$       c-  $F(x) = x + \ln x$       d-  $F(x) = x + x \ln x$

**Question 27.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x+2}$

La tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0 est la droite d'équation

- a-  $y = \frac{1}{2}x$       b-  $y = 2x$       c-  $y = x \ln 2$       d-  $y = 2$

**Question 28.**

L'équation  $e^x + 8 = \frac{1}{e^x}$  a pour ensemble solution :

- a-  $\mathcal{S} = \{4\}$       b-  $\mathcal{S} = \{-4\}$       c-  $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{8}\right\}$       d-  $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

**Question 29.**

L'inéquation  $\frac{e^{2x-15}}{e^{1-x}} < \frac{1}{e}$  a pour solution

- a-  $\mathcal{S} = ]-\infty; 13[$       b-  $\mathcal{S} = ]-\infty; 15[$       c-  $\mathcal{S} = ]5; +\infty[$       d-  $\mathcal{S} = ]-\infty; 5[$

**Question 30.**

L'expression  $(e^{x+7})^2 \times \frac{e^{x-8}}{e^{5+3x}}$  peut s'écrire plus simplement :

- a-  $e^{x^2+10x+46}$       b-  $e$       c-  $e^{6x+11}$       d-  $e^{36}$

**Question 31.**

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 + 1)e^{4x}$  a pour dérivée

- a-  $f'(x) = 2x e^{4x}$       c-  $f'(x) = (2x + 4)e^{4x}$   
b-  $f'(x) = 8x e^{4x}$       d-  $f'(x) = (4x^2 + 2x + 4)e^{4x}$





**Question 39.**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$   
Alors  $p(1 \leq X \leq 4) =$

a-  $e^{-4\lambda} - e^{-\lambda}$

b-  $e^{-\lambda} - e^{-4\lambda}$

c-  $e^{4\lambda} - e^{\lambda}$

d-  $e^{\lambda} - e^{4\lambda}$

**Question 40.**

X suit une loi normale de moyenne 2. On sait que  $p(X \leq -1) = 0,15$   
Alors  $p(2 \leq X \leq 5) =$

a- 0,15

b- 0,35

c- 0,7

d- 0,85

## Partie III : Nouvelle notion

# RELATIONS BINAIRES

Les bases de données (BDD) constituent le cœur du système d'information. E.F CODD est l'inventeur du modèle relationnel. Les méthodes de conception des BDD préconisent une démarche en étapes et font appel à plusieurs notions mathématiques de l'algèbre relationnel tel que la théorie des ensembles et les relations.

### I. Produit cartésien de deux ensembles

**Définition.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de  $E$  par  $F$  est l'ensemble  $E \times F$  des couples  $(x, y)$  tels que  $x \in E$  et  $y \in F$

C'est-à-dire  $E \times F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}$

Donc  $u \in E \times F \Leftrightarrow$  il existe  $x \in E$  et il existe  $y \in F$  tel que  $u = (x, y)$

**Notation :** Si  $E$  est un ensemble non vide. On note  $E^2 = E \times E$

#### Exemples

1)  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) / x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$

2) Si  $E = \{0, 1\}$  alors  $E^2 = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$

3) Si  $E = \{0, 1\}$  et  $F = \{2, 3, 4\}$  alors  $E \times F = \{(0, 2); (0, 3); (0, 4); (1, 2); (1, 3); (1, 4)\}$  et  
 $F \times E = \{(2, 0); (2, 1); (3, 0); (3, 1); (4, 0); (4, 1)\}$  d'où  $E \times F \neq F \times E$

### II. Graphe et relation binaire

#### • Graphe

**Définition.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On dit que  $G$  est un graphe de  $E$  dans  $F$  si  $G$  est une partie de  $E \times F$ ,

c'est-à-dire  $G \subset (E \times F)$

#### Exemples

1)  $E \times F$  est un graphe de  $E$  dans  $F$

2) Soient  $E = \{0, 1\}$ ,  $F = \{2, 3, 4\}$ ,  $G_1 = \{(0, 2); (0, 4); (1, 2); (1, 3)\}$ ,

$G_2 = \{(0, 2); (1, 4); (2, 1); (0, 4)\}$  et  $G_3 = \{(3, 1); (4, 1)\}$ , on a alors :

$G_1$  est un graphe de  $E$  dans  $F$  car  $G_1 \subset (E \times F)$

et  $G_3$  est un graphe de  $F$  dans  $E$  car  $G_3 \subset (F \times E)$

mais  $G_2$  n'est pas un graphe de  $E$  dans  $F$  car  $G_2 \not\subset (E \times F)$  puisque  $(2, 1) \in G_2$  et  $(2, 1) \notin (E \times F)$

#### • Relation binaire

**Définition.** Soit  $E$  un ensemble non vide.

Une relation binaire  $R$  sur  $E$  est la donnée d'un graphe  $G_R$  de  $E$  dans  $E$ .

$G_R$  est appelé le graphe associé à la relation  $R$ .

et on a : pour  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x R y) \Leftrightarrow (x, y) \in G_R$

Si  $x R y$  c'est-à-dire  $(x, y) \in G_R$  on dit alors que  $x$  est en relation avec  $y$ .

$$\text{Donc } G_R = \{ (x, y) \in E^2 \mid x R y \}$$

### Exemples

1) Soient  $E = \{0, 3, 4\}$  et  $G_R = \{(0, 3); (4, 4); (3, 0); (4, 3)\}$  le graphe associé à la relation binaire  $R$  sur  $\{0, 3, 4\}$

On a donc  $0 R 3$  ;  $4 R 4$  ;  $3 R 0$  et  $4 R 3$

mais  $0$  n'est pas en relation avec  $4$  car  $(0, 4) \notin G_R$

2) On note  $E = \{0, -1, 1, i\}$  où  $i$  est le complexe vérifiant  $i^2 = -1$

On considère  $R$  la relation binaire sur  $E$  définie par:

pour  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $y = 1 - x^2$

On a :  $(0, i) \notin G_R$  car  $i \neq 1 - 0$

Pour  $y \in E$  on a :  $(0, y) \in G_R \Leftrightarrow y = 1$  ;  $(1, y) \in G_R \Leftrightarrow y = 0$  ;  $(-1, y) \in G_R \Leftrightarrow y = 0$  et  $(i, y) \in G_R \Leftrightarrow y = 2$  ceci est impossible car  $2 \notin E$

$$\text{Donc } G_R = \{(0, 1); (1, 0); (-1, 0)\}$$

3) Soit  $R$  la relation binaire sur  $\mathbf{R}$  définie par:

pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $x \leq y$  c'est-à-dire  $0 \leq (y - x)$

Alors son graphe est  $G_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$

En particulier on a :  $-1 R 2$  mais  $(0, -1) \notin G_R$

### III. Relations réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive

**Définitions.** Soit  $E$  un ensemble non vide.

Une relation binaire  $R$  sur  $E$  est dite :

1) réflexive si pour tout  $x \in E$  on a :  $(x R x)$  c'est-à-dire  $(x, x) \in G_R$

2) symétrique si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x R y)$  implique  $(y R x)$

C'est-à-dire si  $(x, y) \in G_R$  alors  $(y, x) \in G_R$

3) antisymétrique si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x R y)$  et  $(y R x)$  implique  $x = y$

C'est-à-dire si  $(x, y) \in G_R$  et  $(y, x) \in G_R$  alors  $x = y$

4) transitive si pour tout  $x \in E$ ,  $y \in E$  et  $z \in E$ ,  $(x R y)$  et  $(y R z)$  implique  $(x R z)$

c'est-à-dire si  $(x, y) \in G_R$  et  $(y, z) \in G_R$  alors  $(x, z) \in G_R$

**Remarques.** Soit  $R$  est une relation binaire sur  $E$

1) **S'il existe**  $x \in E$ , tel que  $(x, x) \notin G_R$  (c'est-à-dire  $x$  n'est pas en relation avec  $x$ ) alors **la relation  $R$  n'est pas réflexive.**

2) **S'il existe**  $(x, y) \in E^2$  tels que  $(x, y) \in G_R$  et  $(y, x) \notin G_R$  (c'est-à-dire  $x$  est en relation avec  $y$  mais  $y$  n'est pas en relation avec  $x$ ) alors **la relation R n'est pas symétrique.**

3) **S'il existe**  $(x, y) \in E^2$  tels que  $(x, y) \in G_R$ ,  $(y, x) \in G_R$  et  $x \neq y$  (c'est-à-dire  $x$  est en relation avec  $y$ ,  $y$  est en relation avec  $x$  et  $x \neq y$ ) alors **la relation R n'est pas antisymétrique.**

4) **S'ils existent**  $x \in E$ ,  $y \in E$  et  $z \in E$  tels que  $(x, y) \in G_R$ ,  $(y, z) \in G_R$  et  $(x, z) \notin G_R$  (c'est-à-dire  $x$  est en relation avec  $y$ ,  $y$  est en relation avec  $z$  et  $x$  n'est pas en relation avec  $z$ .) alors **la relation R n'est pas transitive.**

### Exemples

1) Soit R la relation binaire sur  $\mathbf{R}$  définie par: pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $x \leq y$

On a :

- R est réflexive car pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \leq x$
- R n'est pas symétrique car  $(-1, 0) \in G_R$  mais  $(0, -1) \notin G_R$
- R est antisymétrique car pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , si  $(x, y) \in G_R$  et  $(y, x) \in G_R$  alors  $x = y$  (en effet, si  $x \leq y$  et  $y \leq x$  alors  $x = y$ )
- R est transitive car pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $y \in \mathbf{R}$  et  $z \in \mathbf{R}$ , si  $(x, y) \in G_R$  et  $(y, z) \in G_R$  alors  $(x, z) \in G_R$  (en effet, si  $x \leq y$  et  $y \leq z$  alors  $x \leq z$ )

2) Soit R la relation binaire sur  $\{0, 1, 2, 3\}$  de graphe  $G_R = \{(0,0); (1,1); (2,2); (3,3)\}$

Alors la relation R est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

3) Soit R la relation binaire sur  $\mathbf{R}$  définie par: pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $|y| = |x + 1|$

On a :

- R n'est pas réflexive car  $(0,0) \notin G_R$  puisque  $|0| \neq |0 + 1|$
- R n'est pas symétrique car  $(0,1) \in G_R$  et  $(1,0) \notin G_R$  puisque  $|1| = |0 + 1|$  et  $|0| \neq |1 + 1|$
- R n'est pas antisymétrique car  $(0,-1) \in G_R$  et  $(-1,0) \in G_R$  mais  $-1 \neq 0$
- R n'est pas transitive car  $(0,-1) \in G_R$  et  $(-1,0) \in G_R$  mais  $(0,0) \notin G_R$

### Remarques

D'après l'exemple ci-dessus on a :

- R n'est pas symétrique **n'implique pas que** R est antisymétrique
- R n'est pas antisymétrique **n'implique pas que** R est symétrique

## IV. Relation d'équivalence et classe d'équivalence

**Définition.** Soit  $E$  un ensemble non vide.

On appelle relation d'équivalence sur  $E$  toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

**Définition.** Soient  $E$  un ensemble non vide et R une relation d'équivalence sur  $E$ .

Pour chaque  $x \in E$ , on définit l'ensemble  $cl(x) = \{y \in E / x R y\}$ .

$cl(x)$  s'appelle la classe d'équivalence de  $x$ .

**Exemples**

1) Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbf{R}$ .

Si  $R$  est la relation binaire sur  $\mathbf{R}$  définie par: pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $f(x) = f(y)$

Alors  $R$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbf{R}$ .

En particulier la relation binaire sur  $\mathbf{R}$  définie par:

pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $\sin(x) = \sin(y)$

est une relation d'équivalence et pour cette relation

$$cl(0) = \{y \in \mathbf{R} / \sin(0) = \sin(y)\} = \{y \in \mathbf{R} / \sin(y) = 0\} = \{k\pi / k \in \mathbf{Z}\}$$

car  $\sin(a) = 0 \Leftrightarrow$  il existe  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $a = k\pi$

2) Si  $R$  est la relation binaire sur  $\mathbf{Z}$  définie par:

pour  $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ ,  $(x R y) \Leftrightarrow 2$  divise  $(y - x)$  c'est-à-dire il existe  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $y - x = 2k$

Alors  $R$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbf{Z}$  et pour cette relation

$$cl(0) = \{y \in \mathbf{Z} / 2 \text{ divise } (y - 0)\} = \{y \in \mathbf{Z} / \text{il existe } k \in \mathbf{Z}, y = 2k\} = \{2k / k \in \mathbf{Z}\}$$

c'est l'ensemble des entiers pairs

$$cl(1) = \{y \in \mathbf{Z} / 2 \text{ divise } (y - 1)\} = \{y \in \mathbf{Z} / \text{il existe } k \in \mathbf{Z}, y = 2k + 1\} = \{2k + 1 / k \in \mathbf{Z}\}$$

c'est l'ensemble des entiers impairs

## V. Relation d'ordre

**Définition.** Soit  $E$  un ensemble non vide.

On appelle relation d'ordre sur  $E$  toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

**Exemples**

1) Si  $R$  est la relation binaire sur  $\mathbf{R}$  définie par:

pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $x \leq y$

$R$  est une relation d'ordre sur  $\mathbf{R}$  mais ce n'est pas une relation d'équivalence sur  $\mathbf{R}$ .

2) Soit  $R$  la relation binaire sur  $\{0, 1, 2, 3\}$  de graphe  $G_R = \{(0,0); (1,1); (2,2); (3,3)\}$

Alors la relation  $R$  est à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence sur  $\mathbf{R}$

de plus pour chaque  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ , on a :  $cl(x) = \{x\}$

3) Si  $R$  est la relation binaire sur  $\mathbf{R}$  définie par:

pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $x < y$  c'est-à-dire  $0 < (y - x)$

$R$  n'est pas une relation d'ordre sur  $\mathbf{R}$  et ce n'est pas une relation d'équivalence sur  $\mathbf{R}$ .

**20 questions à traiter par tous les candidats**

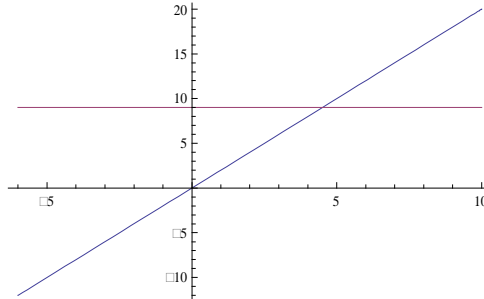
➤ Les exercices et les questions sont indépendants

**Exercice 1.**

Dans l'ensemble  $E$  des droites du plan  $\mathbf{R}^2$ , on considère la relation binaire  $R$  sur  $E$  définie par : pour  $(D, D') \in E^2$ ,  $D R D'$  si et seulement si  $D$  est perpendiculaire à  $D'$

On représente dans le schéma ci-dessous :

- $\Delta$  la droite d'équation :  $y = x$
- $\Delta_1$  la droite d'équation :  $y = 9$
- $(ox)$  la droite d'équation :  $y = 0$
- $(oy)$  la droite d'équation :  $x = 0$



**Question 41.**

Veillez choisir la proposition correcte

- a-  $\Delta R \Delta_1$
- b-  $\Delta R (ox)$
- c-  $(ox) R \Delta_1$
- d-  $(oy) R \Delta_1$

**Question 42.**

$R$  est une relation antisymétrique

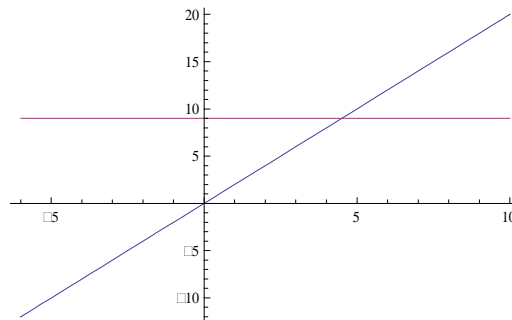
- a- vrai
- b- faux

**Exercice 2.**

Dans l'ensemble  $E$  des droites du plan  $\mathbf{R}^2$ , on considère la relation binaire  $R$  sur  $E$  définie par : pour  $(D, D') \in E^2$ ,  $D R D'$  si et seulement si  $D$  est parallèle à  $D'$

On représente dans le schéma ci-dessous :

- $\Delta$  la droite d'équation :  $y = x$
- $\Delta_1$  la droite d'équation :  $y = 9$
- $(ox)$  la droite d'équation :  $y = 0$
- $(oy)$  la droite d'équation :  $x = 0$



**Question 43.**

Veillez choisir la proposition correcte

- a-  $\Delta R \Delta_1$
- b-  $\Delta R (ox)$
- c-  $(ox) R \Delta_1$
- d-  $(oy) R \Delta_1$

**Question 44.**

$R$  est une relation transitive

- a- vrai
- b- faux

### Exercice 3.

Soient  $E = \{1, 3\}$  et  $F = \{0, 3, 4\}$  on a :

#### Question 45.

Veillez choisir la proposition correcte

- a-  $E \times F = \{(1,0); (3,0); (3,3)\}$
- b-  $E \times F = \{(0,1); (0,3); (3,3); (4,3); (3,1); (4,3)\}$
- c-  $E \times F = \{(3,4); (3,0); (3,3); (1,3); (1,0); (1,4)\}$
- d-  $E \times F = \{(3,4); (3,0); (1,3); (1,0); (1,4)\}$

#### Question 46.

Veillez choisir la proposition correcte

- a-  $F \times E = \{(0,1); (4,0); (3,3); (4,4); (0,0)\}$
- b-  $F \times E = \{(0,1); (0,3); (3,3); (4,3); (3,1); (4,1)\}$
- c-  $F \times E = \{(3,4); (3,0); (3,3); (1,3); (1,0); (1,4)\}$
- d-  $F \times E = \{(4,3); (0,3); (3,3); (4,1); (1,4)\}$

### Exercice 4.

Dans l'ensemble  $E = \{0,1,2,3,4,5\}$  on considère la relation R de graphe :

$$G_R = \{(0,0); (2,2); (2,4); (2,3); (3,2); (3,3); (3,4); (4,2); (4,3); (4,4)\}$$

#### Question 47.

Pour tout  $(x, y) \in E^2$  on a : si  $x R y$  alors  $y R x$

- a- vrai
- b- faux

#### Question 48.

R est une relation d'ordre sur  $E$

- a- vrai
- b- faux

### Exercice 5.

On considère  $E$  l'ensemble des enfants et R la relation binaire sur  $E$  définie par :

pour  $(x, y) \in E^2$ ,  $x R y \Leftrightarrow (x \text{ et } y \text{ ont la même mère}) \text{ ou } (x \text{ et } y \text{ ont le même père})$

#### Question 49.

la relation R est transitive

- a- vrai
- b- faux



**Exercice 6.**

On note  $E = \left\{ 0, 1, 2, \frac{1}{2} \right\}$

On considère R la relation binaire sur E définie par:

Pour  $(x, y) \in E^2$ ,  $x R y$  si et seulement si  $y = e^x$

On note  $G_R$  le graphe de la relation R.

**Question 50.**

Veillez choisir la proposition correcte

- a-  $(1, e) \in G_R$       b-  $0 R 0$       c-  $2 R 2$       d-  $(0, 1) \in G_R$

**Question 51.**

Veillez choisir la proposition correcte

- a- la relation R est réflexive      c-  $G_R = \left\{ (0, 1); (1, e); (2, e^2); \left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right) \right\}$   
b-  $G_R = \left\{ (0, 1) \right\}$       d-  $G_R = \left\{ (1, 0); (e, 1); (e^2, 2); \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right) \right\}$

**Exercice 7.**

On note  $E = \{0, -1, 1, i\}$  où  $i$  est le complexe vérifiant  $i^2 = -1$

On considère R la relation binaire sur E définie par:

pour  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x R y)$  si et seulement si  $y = 1 - x^2$

**Question 52.**

le graphe de la relation R est  $G_R = \{(0, 1); (-1, 0); (1, 0); (i, 2)\}$

- a- vrai      b- faux

**Question 53.**

la relation R est symétrique

- a- vrai      b- faux

**Exercice 8.**

On note  $E = \{-1, 0, 1, 2\}$

On considère R la relation d'équivalence sur E définie par:

pour  $(x, y) \in E^2$ ,  $x R y$  si et seulement si  $x^2 = y^2$

**Question 54.**

Pour  $x \in E$ ,  $x R 1$  si et seulement si  $x = 1$

- a- vrai      b- faux

