10 mai 2014

CONCOURS ALPHA

MATHEMATIQUES ET RAISONNEMENT LOGIQUE

Durée de l'épreuve	2h00
Candidats de Terminale concernés	S (Toutes dominantes)
Nombre de questions du sujet	60
Nombre de réponses attendues	50

Consignes à lire avant de répondre aux questions

Cette épreuve comporte trois parties indépendantes que vous pouvez traiter dans l'ordre de votre choix :

- Partie 1 : 10 questions de raisonnement logique à traiter par tous les candidats ;
- Partie 2 : 20 questions du programme de Terminale S à choisir parmi 30 posées ;
- Partie 3 : 20 questions sur la base d'un mini-cours présentant une notion nouvelle.

Chaque candidat devra répondre correctement à 50 questions pour pouvoir obtenir la note maximale parmi :

- **10 questions de la partie 1 ;**
- **20 questions de la partie 2 ;**
- **20 questions de la partie 3.**

Pour chacune des questions posées, plusieurs réponses vous sont proposées et une seule est exacte. Vous devrez reporter votre choix sur la grille de réponse qui vous est fournie en début d'épreuve :

- Toute bonne réponse vous apporte deux points (+2 points) ;
- Toute mauvaise réponse vous retire un point (-1 point) ;
- Toute non réponse ou annulation de réponse ne vous rapporte et ne vous enlève aucun point (0 point).

L'usage de la calculatrice ou de tout autre moyen de communication est interdit.

Il ne vous sera fourni qu'une seule grille de réponse pour l'épreuve. En cas d'erreur sur votre choix de réponse, vous pouvez modifier ce dernier selon les consignes présentées en page 2.

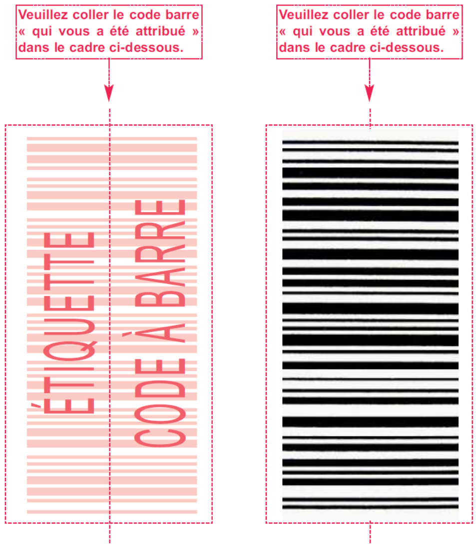
Néanmoins, en cas de force majeure, une seconde feuille pourra vous être fournie par un surveillant.

Instructions importantes pour remplir la grille de réponse

Les réponses aux questions doivent être reportées sur la grille de réponse qui vous a été remise en début d'épreuve. Cette grille sera corrigée automatiquement. Afin que vos résultats puissent être pris en compte, nous vous demandons de respecter scrupuleusement les consignes ci-dessous :

Identification de votre grille de réponse

- Veillez à reporter votre identité dans l'emplacement réservé à cet effet en haut de la grille de réponse ;
- Collez sur votre grille de réponse le code barre qui vous a été remis en début de journée selon le modèle ci-contre. Le code-barres doit être collé dans le sens vertical.
- N'oubliez pas de renseigner l'intitulé de l'épreuve en noircissant la case correspondante au milieu de votre grille de réponse.

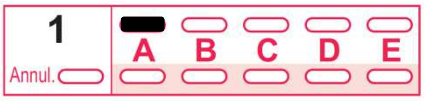


- Pour renseigner vos réponses, utilisez un **stylo bille ou une pointe de feutre de couleur noire ou bleue** selon la consigne ci-dessous :

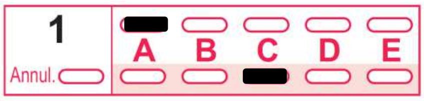
- Ne pas raturer votre réponse, ne pas tenter de gommer ou d'utiliser d'effaceur sur votre grille de réponse ;
- Ne pas froisser ou plier votre grille de réponse.

Modifier votre réponse

- Chaque case de réponse dispose de deux lignes. Vous devez renseigner votre réponse sur la première ligne de la case. Si vous souhaitez modifier votre réponse, renseignez votre nouveau choix sur la deuxième ligne de la case comme indiqué sur l'exemple ci-dessous.



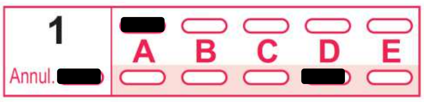
Réponse A



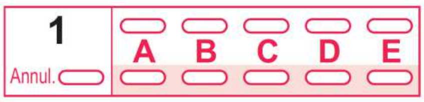
Réponse C

Annuler votre réponse ou ne pas répondre

- Pour annuler totalement votre réponse à une question (première ligne et deuxième ligne) vous devez cocher la case « Annul. » qui se situe sous le numéro de la question.
- Si vous souhaitez ne pas répondre à une question, il n'est pas nécessaire de cocher de case



Réponse Annulée



Non réponse

Partie I Raisonnement logique

- Toutes les questions de cette partie sont obligatoires
- Toutes les questions de cette partie sont indépendantes

Question 1.

Un touriste regardant Big Ben à 6h pile se rend compte qu'il sonne pendant 5 secondes.

Combien de temps (en secondes) mettra-t-il pour sonner midi ?

a- 10
b- 11
c- 12
d- 13

Question 2.

En multipliant par 5 l'âge qu'il avait il y a 10 ans, Mathieu obtient l'âge qu'il aura dans 6 ans.

Quel est l'âge de Mathieu?

a- 22
b- 19
c- 15
d- 14

Question 3.

Deux randonneurs marchant à 5 km/h partent en même temps sur le sentier des douaniers, l'un partant de Quiberon, l'autre de Lorient, soit une distance de 50 km. Ça amuse beaucoup une mouche volant à 30km/h de passer d'un randonneur à l'autre.

Combien de kilomètres aura parcouru la mouche lorsque les deux randonneurs se rencontreront?

a- 140 km
b- 150 km
c- 160 km
d- 170 km

Question 4.

Julie, Karine et Léo portent des coiffures différentes : chapeau, casquette et béret. Ils portent des chaussures différentes : espadrilles, souliers et bottes.
1. Julie n'a pas de casquette et ne porte pas d'espadrilles.
2. Karine a une casquette ou un chapeau et n'a pas de souliers.
3. Léo a des souliers ou des espadrilles et ne porte pas de chapeau.
4. La personne qui porte des bottes a un béret.

Trouver la coiffure et les chaussures de chacun.

a-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	béret	chapeau	casquette
Chaussures	bottes	espadrilles	souliers

b-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	casquette	chapeau	béret
Chaussures	Souliers	espadrilles	bottes

c-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	béret	casquette	chapeau
Chaussures	espadrilles	souliers	bottes

d-

Noms	Julie	Karine	Léo
Coiffures	casquette	béret	chapeau
Chaussures	bottes	espadrilles	souliers

Question 5.

Au mont Blanc se trouve un télésiège. Au moment où le siège n° 95 croise le siège n° 105, le n°240 croise le n°230. On sait que les sièges sont régulièrement espacés et numérotés dans l'ordre à partir du n°1.

Combien de sièges composent ce télésiège?

a- 255	c- 270
b- 260	d- 280

Question 6.

1) Prenez d'abord :
1 kilogrammes =1000 grammes et 2 kilogrammes =2000 grammes
2) Multiplions chaque masse en kilo entre elles puis de même pour celles en grammes. On a donc l'égalité : 1x2 kg =1000x2000 g
3) Ce qui fait donc : 2 kg = 2000000 g
4) Soit plus exactement en changeant d'unité 2 kg = 2000 kg

Où est l'erreur ?

a- Etape 1	c- Etape 3
b- Etape 2	d- Etape 4

Question 7.

On pense que les égyptiens de la haute antiquité transportaient les pierres servant à bâtir les pyramides en les faisant rouler sur des rondins de bois. Soit une pierre de 10m de long sur 1m de large, posée sur 10 rondins. Chaque rondin fait exactement un mètre de circonférence.

Lorsque les rondins auront parcouru 1m, quelle distance aura parcouru la pierre (en mètres)?

a- 1	c- 3.14
b- 2	d- 6.28

Question 8.

Un scientifique décide de mesurer la taille d'un cercle à l'aide d'une boussole et d'un mètre très précis. Pour cela, il se met à un point quelconque du cercle et se dirige vers le nord jusqu'à un autre point du cercle. Il parcourt de cette façon 30 mètres.
Il répète ensuite ce procédé vers l'ouest et parcourt 40 mètres.

Quel est le diamètre du cercle en mètres?

a- 27.18m	c- 47.34m
b- 32m	d- 50m

Question 9.

Trouver, parmi les solutions proposées, celle qui peut s'intégrer à la fois à l'ensemble vertical et à l'ensemble horizontal.

	KAF			
KST	?	FLM	KCD	OFG
	UFK			
	KFS			
	FLK			

a- FJK
b- AFK
c- KUV
d- EFG

Question 10.

Chacune des trois phrases cherchées utilise les mots suivants qui sont pris chacun une seule fois.

Premiers mots : Mon, Son, Ton
Deuxièmes mots : léopard, lion, tigre
Troisièmes mots : court, marche, se repose

1. Le tigre ne m'appartient pas et il se déplace.
2. Le léopard ne t'appartient pas et il ne court pas.
3. L'animal qui t'appartient marche.
4. L'animal qui se repose lui appartient.

Écrire chacune des phrases.

a-

Premier mot	mon	son	ton
Deuxième mot	lion	léopard	tigre
Troisième mot	court	se repose	marche

b-

Premier mot	mon	son	ton
Deuxième mot	tigre	lion	léopard
Troisième mot	marche	court	Se repose

c-

Premier mot	mon	son	ton
Deuxième mot	lion	léopard	tigre
Troisième mot	se repose	marche	court

d-

Premier mot	mon	son	ton
Deuxième mot	tigre	lion	léopard
Troisième mot	se repose	marche	court

Partie II : questions du programme de Terminale S

- Cette partie comporte 30 questions du programme obligatoire de Mathématiques de Terminale S. Vous devez répondre à 20 questions parmi les 30 proposées.
- Si vous répondez à plus de 20 questions, seules les 20 premières réponses seront prises en compte.
- Toutes les questions de cette partie sont indépendantes.

Question 11.

L'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$:

a- 2 solutions réelles distinctes
b- 2 solutions complexes conjuguées
c- Aucune solution
d- Une solution réelle et une solution imaginaire pure

Question 12.

Soit z le complexe égal à $\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{i}$

a- $\arg z = \frac{\pi}{4} [2\pi]$
b- $|z| = 2$
c- $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
d- $z^4 = 16$

Question 13.

Le module de $2 + i$ est égal à :

a- $\sqrt{3}$
b- 3
c- $\sqrt{5}$
d- 1

Question 14.

Le complexe $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ a pour argument :

a- $\frac{5\pi}{12}$
b- $\frac{\pi}{12}$
c- $\frac{7\pi}{12}$
d- $-\frac{\pi}{12}$

Question 15.

z est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$

z^{2014} a pour argument :

a- $\frac{\pi}{3} [2\pi]$
b- $\frac{2\pi}{3} [2\pi]$
c- $\frac{4\pi}{3} [2\pi]$
d- $\frac{5\pi}{3} [2\pi]$

Question 16.

Soit E, F et G les points d'affixes respectives $z_E = 2i$, $z_F = -2i$ et $z_G = 3$
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 3$ est :

a- le cercle de diamètre [EG]
b- la médiatrice de [EG]
c- le cercle de centre E de rayon 3
d- le cercle de centre F de rayon 3

Question 17.

Le plan d'équation cartésienne $3x - y + 2z - 5 = 0$ a pour vecteur normal :

a- $\vec{n}(3 ; -1 ; 2 ; -5)$
b- $\vec{n}(-3 ; 1 ; -2 ; 5)$
c- $\vec{n}(3 ; 1 ; 2)$
d- $\vec{n}(3 ; -1 ; 2)$

Question 18.

La droite $\mathcal{D}$ passant par A (1 ; - 4 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (3 ; 1 ; - 1) a pour représentation paramétrique le système :

a- $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$
b- $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$
c- $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$
d- $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Question 19.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + z + 3 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 3 + 2t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - t \end{cases}$. Alors :

a- la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$
b- la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$
c- la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$
d- la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants

Question 20.

On considère les points :
A(4 ;4 ;-5) , B (-2 ;6 ;5) , C(0 ;-2 ;3) , D(2 ;1 ;-1) , E(-1 ;2 ;4) et F(-4 ;3 ; 9)

a- les points B,E,C définissent un plan
b- les points A,C,D définissent un plan
c- les points D,E,F définissent un plan
d- les points C,D,E définissent un plan

Question 21.

$\lim_{x \to -\infty} [x + \ln(x^2 + 1)] =$

a- -1
b- 0
c- $+\infty$
d- $-\infty$

Question 22.

La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 + ln\, x - 2$ a pour dérivée :

a- $f'(x) = \frac{3}{x}$
b- $f'(x) = \frac{2x\ln x + 1}{x}$
c- $f'(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x}$
d- $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

Question 23.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a- f est croissante sur $\mathbb{R}$
b- f est décroissante sur $\mathbb{R}$
c- la courbe représentative de f possède exactement deux asymptotes
d- la courbe représentative de f possède exactement une asymptote

Question 24.

La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2e^x - 1$ admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation :

a- $y = 2x + 1$ b- $y = x + 2$ c- $y = 2x - 1$ d- $y = x - 2$

Question 25.

$\ln(2^2) + \ln 2 - 4\ln\sqrt{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$

a- $-\ln 2$ b- 0 c- $\ln 2$ d- $2\ln 2$

Question 26.

-1 est l'unique solution de l'équation :

a- $(x+2)\ln(x+2) = 0$
b- $(x+1)\ln(x+1) = 0$
c- $(x+2)\ln(x-1) = 0$
d- $(x+1)\ln(x-2) = 0$

Question 27.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx =$

a- 0 b- 1 c- -1 d- ln2

Question 28.

$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} =$

a- $\frac{1}{e}$ b- ln2 c- $e^2 - e$ d- 1

Question 29.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x \cos x$ a pour primitive :

a- $F(x) = 2e^x \sin x$
b- $F(x) = e^x(\sin x + \cos x)$
c- $F(x) = e^{2x} \sin x$
d- $F(x) = e^x(\sin x - \cos x)$

Question 30.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x+1}$ a pour dérivée :

a- $f'(x) = 2e^{2x+1}$
b- $f'(x) = (x+1)e^{2x+1}$
c- $f'(x) = \frac{(1-2x)e^{2x+1}}{x^2}$
d- $f'(x) = (2x+1)e^{2x+1}$

Question 31.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
La somme des 5 premiers termes de cette suite est égale à :

a- $\frac{31}{2}$ b- $\frac{63}{4}$ c- $\frac{15}{2}$ d- $\frac{31}{4}$

Question 32.

On considère l'algorithme suivant :
Entrée : soit n un entier naturel non nul
Initialisation : affecter à u la valeur 0
Traitement : POUR i allant de 1 à n
Affecter à u la valeur (2 – u) / (1 + u)
Afficher u
FIN POUR
En faisant fonctionner cet algorithme avec n = 3 quel résultat affiche – t – il en sortie ?

a- 0 ; 2 ; 0 ; 2 b- 2 c- 1,33333 d- 2 ; 0 ; 2

Question 33.

Une suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{3} u_n \end{cases}$ pour tout entier naturel non nul n

La suite (u_n) est :

a- géométrique de raison $\frac{-1}{3}$
b- arithmétique de raison $\frac{-1}{3}$
c- géométrique de raison $\frac{2}{3}$
d- croissante

Question 34.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n}{n^2+1}$

a- (u_n) est une suite croissante
b- (u_n) est une suite géométrique
c- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
d- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Question 35.

92% des lycéens sont inscrits sur un réseau social ; parmi eux 20% possèdent plus de 300 amis . On interroge un lycéen au hasard. La probabilité qu'il ait plus de 300 amis sur un réseau social est égal à :

a- 0,46 b- 0,184 c- 0,08 d- 0,736

Question 36.

A et B sont 2 événements relatifs à une même expérience aléatoire et $p(\mathrm{A}) \neq 0$

a- $p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 1 - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
b- $p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$
c- $p(\mathrm{B}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})$
d- $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1$

Question 37.

L'espérance mathématique d'une loi binomiale de paramètres
$n = 30$ et $p = 0{,}02$ est égale à :

a- 6 b- 0,6 c- 1500 d- 30,02

Question 38.

Un fabricant automobile estime qu'une pièce mécanique a une durée de vie moyenne de 1500 jours.
On suppose que la variable T qui représente la durée de vie de cette pièce suit une loi exponentielle.
Alors pour tout réel t strictement positif :

a- $p\,(\mathrm{T}<t) = e^{1500t}$

b- $p\,(\mathrm{T} < 0{,}75) = 0{,}25$

c- $p\,(\mathrm{T}<t) = e^{\frac{-t}{1500}}$

d- $p\,(\mathrm{T} >t) = e^{\frac{-t}{1500}}$

Question 39.

On mesure (en heure) le temps d'attente à un guichet . L'expérience prouve que le temps d'attente peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi uniforme sur [0 ;1]

a- $p\,(\mathrm{T} > 0{,}75) = 0{,}25$

b- $p\,(\mathrm{T} < 0{,}75) = 0{,}25$

c- $p\,(\mathrm{T} = 0{,}75) = 0{,}25$

d- $p\,(\mathrm{T} = 0{,}25) = 0{,}75$

Question 40.

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}\,(\mu; \sigma^2)$ d'espérance μ et de variance σ^2 , alors la variable centrée réduite associée à X est :

a- $\frac{X-\mu}{\sigma^2}$

b- $X - \frac{\mu}{\sigma^2}$

c- $\frac{X-\mu}{\sigma}$

d- $X - \frac{\mu}{\sigma}$

Partie III : Nouvelle notion

RELATIONS BINAIRES

Les bases de données (BDD) constituent le cœur du système d'information. E.F CODD est l'inventeur du modèle relationnel. Les méthodes de conception des BDD préconisent une démarche en étapes et font appel à plusieurs notions mathématiques de l'algèbre relationnel tel que la théorie des ensembles et les relations.

I. Produit cartésien de deux ensembles

Définition. Soient E et F deux ensembles non vides.
Le produit cartésien de E par F est l'ensemble $E\times F$ des couples (x, y) tels que $x\in E$ et $y\in F$
C'est-à-dire $E\times F = \{(x, y) / x\in E, y\in F\}$
Donc $u\in E\times F \Leftrightarrow$ il existe $x\in E$ et il existe $y\in F$ tel que $u=(x, y)$

Notation : Si E est un ensemble non vide. On note $E^2 = E\times E$

Exemples
1) $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R} = \{(x, y) / x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$
2) Si $E=\{0,1\}$ alors $E^2 = \{(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)\}$
3) Si $E=\{0,1\}$ et $F=\{2,3,4\}$ alors $E\times F = \{(0,2);(0,3);(0,4);(1,2);(1,3);(1,4)\}$ et
$F\times E = \{(2,0);(2,1);(3,0);(3,1);(4,0);(4,1)\}$ d'où $E\times F \neq F\times E$

II. Graphe et relation binaire

- Graphe

Définition. Soient E et F deux ensembles non vides.
On dit que G est un graphe de E dans F si G est une partie de $E\times F$,
c'est-à-dire $G\subset (E\times F)$

Exemples
1) $E\times F$ est un graphe de E dans F
2) Soient $E=\{0,1\}$, $F=\{2,3,4\}$, $G_1 = \{(0,2);\ (0,4);(1,2);(1,3)\}$,
$G_2 = \{(0,2);\ (1,4);(2,1);(0,4)\}$ et $G_3 = \{(3,1);\ (4,1)\}$, on a alors :
G_1 est un graphe de E dans F car $G_1 \subset (E\times F)$
et G_3 est un graphe de F dans E car $G_3 \subset (F\times E)$
mais G_2 n'est pas un graphe de E dans F car $G_2 \not\subset (E\times F)$ puisque $(2,1)\in G_2$ et $(2,1)\notin (E\times F)$

- Relation binaire

Définition. Soit E un ensemble non vide.
Une relation binaire R sur E est la donnée d'un graphe G_{R} de E dans E.
G_{R} est appelé le graphe associé à la relation R.

et on a : pour $(x, y)\in E^2$, $(x\ \mathrm{R}\ y) \Leftrightarrow (x, y)\in G_{\mathrm{R}}$

Si $x \mathrm{R} y$ c'est-à-dire $(x, y) \in G_{\mathrm{R}}$ on dit alors que x est en relation avec y.

Donc $G_{\mathrm{R}} = \{ (x, y) \in E^2 \ / \ x \mathrm{R} y \}$

Exemples

1) Soient $E = \{0, 3, 4\}$ et $G_{\mathrm{R}} = \{(0,3);\ (4,4); (3,0); (4,3)\}$ le graphe associé à la relation binaire R sur $\{0, 3, 4\}$

On a donc $0 \mathrm{R} 3$; $4 \mathrm{R} 4$; $3 \mathrm{R} 0$ et $4 \mathrm{R} 3$

mais 0 n'est pas en relation avec 4 car $(0,4) \notin G_{\mathrm{R}}$

2) On note $E = \{0, -1, 1, i\}$ où i est le complexe vérifiant $i^2 = -1$

On considère R la relation binaire sur E définie par:

pour $(x, y) \in E^2$,($x \mathrm{R} y$) si et seulement si $y = 1 - x^2$

On a : $(0, i) \notin G_{\mathrm{R}}$ car $i \neq 1 - 0$

Pour $y \in E$ on a : $(0, y) \in G_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow y = 1$; $(1, y) \in G_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow y = 0$; $(-1, y) \in G_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow y = 0$ et $(i, y) \in G_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow y = 2$ ceci est impossible car $2 \notin E$

Donc $G_{\mathrm{R}} = \{(0,1); (1,0); (-1,0)\}$

3) Soit R la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par:

pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, ($x \mathrm{R} y$) si et seulement si $x \leq y$ c'est-à-dire $0 \leq (y - x)$

Alors son graphe est $G_{\mathrm{R}} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x \leq y \}$

En particulier on a : $-1 \mathrm{R} 2$ mais $(0, -1) \notin G_{\mathrm{R}}$

III. Relations réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive

Définitions. Soit E un ensemble non vide.

Une relation binaire R sur E est dite :

1) réflexive si pour tout $x \in E$ on a : ($x \mathrm{R} x$) c'est-à-dire $(x, x) \in G_{\mathrm{R}}$

2) symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, ($x \mathrm{R} y$) implique ($y \mathrm{R} x$)

C'est-à-dire si $(x, y) \in G_{\mathrm{R}}$ alors $(y, x) \in G_{\mathrm{R}}$

3) antisymétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$, ($x \mathrm{R} y$) et ($y \mathrm{R} x$) implique $x = y$

C'est-à-dire si $(x, y) \in G_{\mathrm{R}}$ et $(y, x) \in G_{\mathrm{R}}$ alors $x = y$

4) transitive si pour tout $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$, ($x \mathrm{R} y$) et ($y \mathrm{R} z$) implique ($x \mathrm{R} z$)

c'est-à-dire si $(x, y) \in G_{\mathrm{R}}$ et $(y, z) \in G_{\mathrm{R}}$ alors $(x, z) \in G_{\mathrm{R}}$

Remarques. Soit R est une relation binaire sur E

1) **S'il existe** $x \in E$, tel que $(x, x) \notin G_{\mathrm{R}}$ (c'est-à-dire x n'est pas en relation avec x) alors **la relation** R **n'est pas réflexive.**

2) **S'il existe** $(x,y)\in E^2$ tels que $(x,y)\in G_R$ et $(y,x)\notin G_R$ (c'est-à-dire x est en relation avec y mais y n'est pas en relation avec x) alors **la relation** R **n'est pas symétrique.**

3) **S'il existe** $(x,y)\in E^2$ tels que $(x,y)\in G_R$, $(y,x)\in G_R$ et $x\neq y$ (c'est-à-dire x est en relation avec y , y est en relation avec x et $x\neq y$) alors **la relation** R **n'est pas antisymétrique.**

4) **S'ils existent** $x\in E$, $y\in E$ et $z\in E$ tels que $(x,y)\in G_R$, $(y,z)\in G_R$ et $(x,z)\notin G_R$ (c'est-à-dire x est en relation avec y , y est en relation avec z et x n'est pas en relation avec z ,) alors **la relation** R **n'est pas transitive.**

Exemples

1) Soit R la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par: pour $(x,y)\in \mathbf{R}^2$,(x R y) si et seulement si $x\leq y$

On a :

a) R est réflexive car pour tout $x\in \mathbf{R}$, $x\leq x$
b) R n'est pas symétrique car $(-1,0)\in G_R$ mais $(0,-1)\notin G_R$
c) R est antisymétrique car pour tout $(x,y)\in \mathbf{R}^2$, si $(x,y)\in G_R$ et $(y,x)\in G_R$ alors $x=y$ (en effet, si $x\leq y$ et $y\leq x$ alors $x=y$)
d) R est transitive car pour tout $x\in \mathbf{R}$, $y\in \mathbf{R}$ et $z\in \mathbf{R}$, si $(x,y)\in G_R$ et $(y,z)\in G_R$ alors $(x,z)\in G_R$ (en effet, si $x\leq y$ et $y\leq z$ alors $x\leq z$)

2) Soit R la relation binaire sur $\{0,1,2,3\}$ de graphe $G_R = \{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3)\}$

Alors la relation R est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

3) Soit R la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par: pour $(x,y)\in \mathbf{R}^2$,(x R y) si et seulement si $|y|=|x+1|$

On a :

a) R n'est pas réflexive car $(0,0)\notin G_R$ puisque $|0|\neq|0+1|$
b) R n'est pas symétrique car $(0,1)\in G_R$ et $(1,0)\notin G_R$ puique $|1|=|0+1|$ et $|0|\neq|1+1|$
c) R n'est pas antisymétrique car $(0,-1)\in G_R$ et $(-1,0)\in G_R$ mais $-1\neq 0$
d) R n'est pas transitive car $(0,-1)\in G_R$ et $(-1,0)\in G_R$ mais $(0,0)\notin G_R$

Remarques

D'après l'exemple ci-dessus on a :

1) R n'est pas symétrique **n'implique pas que** R est antisymétrique
2) R n'est pas antisymétrique **n'implique pas que** R est symétrique

IV. Relation d'équivalence et classe d'équivalence

Définition. Soit E un ensemble non vide.
On appelle relation d'équivalence sur E toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Définition. Soient E un ensemble non vide et R une relation d'équivalence sur E .
Pour chaque $x\in E$, on définit l'ensemble $cl(x)=\{y\in E \ / \ x \text{ R } y\}$.
$cl(x)$ s'appelle la classe d'équivalence de x .

Exemples

1) Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$.

Si R est la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par: pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, (x R y) si et seulement si $f(x) = f(y)$

Alors R est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.

En particulier la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par:

pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, (x R y) si et seulement si $\sin(x) = \sin(y)$

est une relation d'équivalence et pour cette relation

$cl(0) = \{y \in \mathbf{R} \,/ \sin(0) = \sin(y)\} = \{y \in \mathbf{R} \,/ \sin(y) = 0\} = \{k\pi / k \in \mathbf{Z}\}$

car $\sin(a) = 0 \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbf{Z},\ a = k\pi$

2) Si R est la relation binaire sur $\mathbf{Z}$ définie par:

pour $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$,(x R y) $\Leftrightarrow 2$ divise $(y - x)$ c'est-à-dire il existe $k \in \mathbf{Z},\ y - x = 2k$

Alors R est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$ et pour cette relation

$cl(0) = \{y \in \mathbf{Z} \,/ 2 \ \textit{divise}\ (y - 0)\} = \{y \in \mathbf{Z} \ / \textit{il existe}\ k \in \mathbf{Z},\ y = 2k\} = \{2k \ / \ k \in \mathbf{Z}\}$ c'est l'ensemble des entiers pairs

$cl(1) = \{y \in \mathbf{Z} \,/ 2 \ \textit{divise}\ (y - 1)\} = \{y \in \mathbf{Z} \ / \textit{il existe}\ k \in \mathbf{Z},\ y = 2k + 1\} = \{2k + 1 \ / \ k \in \mathbf{Z}\}$ c'est l'ensemble des entiers impairs

V. Relation d'ordre

Définition. Soit E un ensemble non vide.
On appelle relation d'ordre sur E toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples

1) Si R est la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par:

pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,(x R y) si et seulement si $x \le y$

R est une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ mais ce n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.

2) Soit R la relation binaire sur $\{0, 1, 2, 3\}$ de graphe $G_{\mathrm{R}} = \{(0,0); (1,1); (2,2); (3,3)\}$

Alors la relation R est à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$

de plus pour chaque $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a : $cl(x) = \{x\}$

3) Si R est la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par:

pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,(x R y) si et seulement si $x < y$ c'est-à-dire $0 < (y - x)$

R n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ et ce n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.

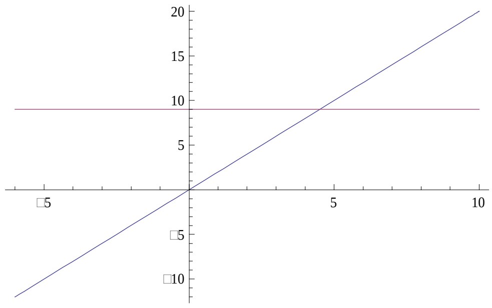
20 questions à traiter par tous les candidats

- Les exercices et les questions sont indépendants

Exercice 1.

Dans l'ensemble E des droites du plan $\mathbf{R}^2$, on considère la relation binaire R sur E définie par : pour $(D, D') \in E^2$, $D \,\mathrm{R}\, D'$ si et seulement si D est perpendiculaire à D'

On représente dans le schéma ci-dessous :
Δ la droite d'équation : $y = x$
Δ_1 la droite d'équation : $y = 9$
(ox) la droite d'équation : $y = 0$
(oy) la droite d'équation : $x = 0$



Question 41.

Veuillez choisir la proposition correcte

a- $\Delta \,\mathrm{R}\, \Delta_1$ b- $\Delta \,\mathrm{R}\, (ox)$ c- $(ox) \,\mathrm{R}\, \Delta_1$ d- $(oy) \,\mathrm{R}\, \Delta_1$

Question 42.

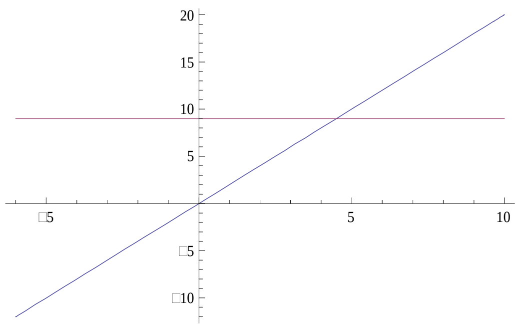
R est une relation antisymétrique

a- vrai b- faux

Exercice 2.

Dans l'ensemble E des droites du plan $\mathbf{R}^2$, on considère la relation binaire R sur E définie par : pour $(D, D') \in E^2$, $D \,\mathrm{R}\, D'$ si et seulement si D est parallèle à D'

On représente dans le schéma ci-dessous :
Δ la droite d'équation : $y = x$
Δ_1 la droite d'équation : $y = 9$
(ox) la droite d'équation : $y = 0$
(oy) la droite d'équation : $x = 0$



Question 43.

Veuillez choisir la proposition correcte

a- $\Delta \,\mathrm{R}\, \Delta_1$ b- $\Delta \,\mathrm{R}\, (ox)$ c- $(ox) \,\mathrm{R}\, \Delta_1$ d- $(oy) \,\mathrm{R}\, \Delta_1$

Question 44.

R est une relation transitive

a- vrai b- faux

Exercice 3.

Soients $E=\{1\ ,\ 3\}$ et $F=\{0\ ,\ 3,4\}$ on a :

Question 45.

Veuillez choisir la proposition correcte

a- $E\times F=\{(1,0);\ (3,0);\ (3,3)\}$
b- $E\times F=\{(0,1);\ (0,3);\ (3,3);(4,3);(3,1);(4,3)\}$
c- $E\times F=\{(3,4);\ (3,0);\ (3,3);(1,3);(1,0);(1,4)\}$
d- $E\times F=\ \{(3,4);\ (3,0);(1,3);(1,0);(1,4)\}$

Question 46.

Veuillez choisir la proposition correcte

a- $F\times E=\{(0,1);\ (4,0);\ (3,3);(4,4);(0,0)\}$
b- $F\times E=\{(0,1);\ (0,3);\ (3,3);(4,3);(3,1);(4,1)\}$
c- $F\times E=\{(3,4);\ (3,0);\ (3,3);(1,3);(1,0);(1,4)\}$
d- $F\times E=\ \{(4,3);\ (0,3);(3,3);(4,1);(1,4)\}$

Exercice 4.

Dans l'ensemble $E=\{0,1,2,3,4,5\}$ on considère la relation R de graphe :

$$G_{\mathrm{R}}=\{(0,0);\ (2,2);\ (2,4);\ (2,3);(3,2);(3,3);\ (3,4);\ (4,2);\ (4,3);(4,4)\}$$

Question 47.

Pour tout $(x,y)\in E^2$ on a : si $x\,\mathrm{R}\,y$ alors $y\,\mathrm{R}\,x$

a- vrai b- faux

Question 48.

R est une relation d'ordre sur E

a- vrai b- faux

Exercice 5.

On considère E l'ensemble des enfants et R la relation binaire sur E définie par :
pour $(x,y)\in E^2$, $x\,\mathrm{R}\,y \Leftrightarrow$ (x et y ont la même mère) ou (x et y ont le même père)

Question 49.

la relation R est transitive

a- vrai b- faux

Exercice 6.

On note $E = \left\{ 0, 1, 2, \frac{1}{2} \right\}$

On considère R la relation binaire sur E définie par:

Pour $(x, y) \in E^2$, $x \text{ R } y$ si et seulement si $y = e^x$

On note G_{R} le graphe de la relation R.

Question 50.

Veuillez choisir la proposition correcte

a- $(1, e) \in G_{\text{R}}$ b- $0 \text{ R } 0$ c- $2 \text{ R } 2$ d- $(0,1) \in G_{\text{R}}$

Question 51.

Veuillez choisir la proposition correcte

a- la relation R est réflexive

b- $G_{\text{R}} = \{(0,1)\}$

c- $G_{\text{R}} = \left\{(0,1); (1, e); (2, e^2); (\frac{1}{2}, \sqrt{e})\right\}$

d- $G_{\text{R}} = \left\{(1,0); (e,1); (e^2,2); (\sqrt{e}, \frac{1}{2})\right\}$

Exercice 7.

On note $E = \{0, -1, 1, i\}$ où i est le complexe vérifiant $i^2 = -1$

On considère R la relation binaire sur E définie par:

pour $(x, y) \in E^2$, ($x \text{ R } y$) si et seulement si $y = 1 - x^2$

Question 52.

le graphe de la relation R est $G_{\text{R}} = \{(0,1); (-1,0); (1,0); (i,2)\}$

a- vrai b- faux

Question 53.

la relation R est symétrique

a- vrai b- faux

Exercice 8.

On note $E = \{-1, 0, 1, 2\}$

On considère R la relation d'équivalence sur E définie par:

pour $(x, y) \in E^2$, $x \text{ R } y$ si et seulement si $x^2 = y^2$

Question 54.

Pour $x \in E$, $x \text{ R} 1$ si et seulement si $x = 1$

a- vrai b- faux

Question 55.

$\{x \in E \ / \ x \, \mathrm{R} \, 1\} = \{-1, 1\}$

a- vrai b- faux

Question 56.

la relation R est d'ordre

a- vrai b- faux

Exercice 9.

On définit sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ la relation d'équivalence R suivante :

pour $(x, y) \in E^2$, ($x \, \mathrm{R} \, y$) si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y - x = 3k$

Pour $x \in E$, on note $cl(x)$ la classe de x

Question 57.

$5 \in cl(1)$

a- vrai b- faux

Question 58.

$cl(1) = \{1, 4, 7\}$

a- vrai b- faux

Exercice 10.

Soit $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des complexes non nuls et R la relation binaire sur $\mathbf{C}^*$ définie par : pour $(x, y) \in \mathbf{C}^{*2}$, $x \, \mathrm{R} \, y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \left]0, +\infty\right[$. On admet que R est une relation d'équivalence.

Question 59.

$cl(1) = \{1\}$

a- vrai b- faux

Question 60.

$cl(i) = \left]0, +\infty\right[$

a- vrai b- faux

FIN DE L'EPREUVE