NOM

Prénom

EPREUVE DE
MATHEMATIQUES ET RAISONNEMENT LOGIQUE

Date de l'épreuve	04 mai 2013
Durée de l'épreuve	2h00
Candidats Concernés	Epreuve commune aux candidats de Terminale S, STI2D, ES, STL, STAV
Nombre de questions du sujet	60
Nombre de réponses nécessaires pour obtenir la note maximale	30

Présentation de l'épreuve

Cette épreuve comporte trois parties indépendantes que vous pouvez traiter dans l'ordre de votre choix :

- Partie 1 : 10 questions de raisonnement logique à traiter par tous les candidats
- Partie 2 : 10 questions de spécialité
  - Les candidats de terminale S répondront aux questions 11 à 20
  - Les candidats de terminale STI2D, STL, STAV répondront aux questions 21 à 30
  - Les candidats de terminale ES répondront aux questions 31 à 40
- Partie 3 : 20 questions sur la base d'un mini-cours présentant une notion nouvelle

Chaque candidat devra répondre correctement à 30 questions pour pouvoir obtenir la note maximale parmi :

- **10 questions de la partie 1 ;**
- **10 questions de la partie 2 (correspondant à son Bac d'origine) et**
- **20 questions de la partie 3.**

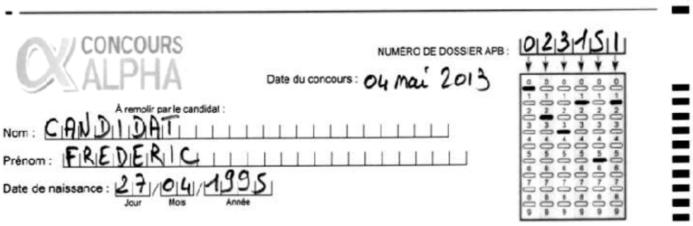
Consignes à lire avant de répondre aux questions

- Renseignez vos données personnelles en haut à droite de ce document. Vous devrez le restituer en fin d'épreuve.
- Renseignez vos données personnelles sur la grille réponse en respectant les instructions pour remplir la grille réponse.
- Avant de répondre, commencez par parcourir le sujet et identifier les questions auxquelles vous pourrez répondre.
- Il ne sera fourni aucun brouillon. Vous devrez utiliser les pages non imprimées de votre sujet (Verso de chaque page).
- N'attendez pas la dernière minute pour reporter les réponses aux questions sur votre grille réponse.
- **Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte**.

Instructions importantes pour remplir la grille de réponse

Les réponses aux questions doivent être reportées sur la grille réponse jointe. Cette grille sera corrigée automatiquement. Afin que vos résultats puissent être pris en compte, nous vous demandons de respecter scrupuleusement les consignes suivantes :

- Utilisez un **stylo bille ou une pointe de feutre de couleur noire ou bleue**. Ne pas raturer, gommer ni utiliser d'effaceur. Ne pas froisser ou plier la grille réponse.
- Identité du candidat : remplir selon le schéma ci-dessous.

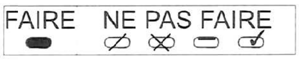


Attention, si votre **numéro APB comporte moins de 6 chiffres**, vous devrez le renseigner comme suit :

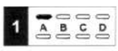
- Numéro APB à 4 chiffres : inscrire 2 « zéros » puis votre numéro APB.
  - Exemple N°APB 1234 -> inscrire 001234
- Numéro APB à 5 chiffres : inscrire 1 « zéro » puis votre numéro APB.
  - Exemple N°APB : 23456 -> inscrire 023456

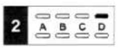
- Renseigner vos réponses : **noircissez les cases** selon les consignes ci-dessous

Exemple de remplissage :



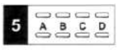
- Pour modifier votre réponse, **ne pas raturer, ni gommer, ni utiliser d'effaceur**. Reportez vous à l'exemple ci-dessous


Réponse A


Réponse D


Annulation réponse B et choix réponse C


Annulation des réponses, abstention


Non réponse à la question, abstention

Barème

Vous devrez répondre à 30 questions correspondant à votre spécialité d'origine pour prétendre à l'obtention de la note maximale. Si vous répondez aux questions des autres spécialités, vos réponses ne seront pas prises en compte. Si vous répondez à plus de 30 questions, seules les 30 premières seront prises en compte.

- Toute bonne réponse vaut +1 point (plus 1 point)
- Toute réponse inexacte vaut -1 point (moins 1 point)
- Toute non-réponse vaut 0 point

Partie 1 : Raisonnement logique

- Les questions sont indépendantes
- Les questions sont à traiter par tous les candidats

Question 1.

Un ouvrier met 8 jours pour creuser une excavation de 8m de long par 8m de large et 8m de profondeur.
Combien de jours mettra-t-il pour creuser une cavité de 4m de long par 4m de large et 4m de profondeur ?

a. 1 jour b. 2 jours c. 3 jours d. 4 jours

Question 2.

Si nous ne sommes pas le lendemain de lundi ou le jour avant jeudi, que demain n'est pas dimanche, que ce n'était pas dimanche hier, que le jour d'après demain n'est pas samedi et que le jour d'avant-hier n'était pas mercredi, quel jour sommes-nous ?

a. Lundi b. Mercredi c. Vendredi d. Dimanche

Question 3.

Vous avez dépensé votre budget soldes dans 5 magasins différents. Vous avez dépensé, dans chaque magasin, 10€ de plus que la moitié de ce qu'il vous restait en y rentrant.
Quel était votre budget soldes ?

a. 62€ b. 120€ c. 408€ d. 620€

Question 4.

Une famille de 5 personnes va chez le photographe pour une photo de groupe. Le photographe tient à prendre une photo en testant toutes les places possibles entre les membres de la famille.
Combien de photos seront prises?

a. 60 b. 80 c. 100 d. 120

Question 5.

Un dromadaire doit transporter un maximum de bananes d'une oasis à une autre distante de 1000km.
Il y a 3000 bananes dans le stock mais le dromadaire ne peut en transporter que 1000 au maximum à chaque voyage.
De plus, pour survivre à son voyage, il mangera une banane à chaque kilomètre parcouru.
Combien de bananes le dromadaire peut-il transporter à la deuxième oasis ?

a. 0 b. 1 c. 533 d. 758

Question 6.

Jocelyne, Lucie et Paule ont visité des hôtels différents. Les numéros de chambre sont aussi différents.

Les noms des hôtels sont : Cabotin, Logis, Noctambule
Les numéros de chambres sont : 305, 419, 538

1. La cliente du Noctambule quitte sa chambre, la 419, pour aller faire des emplettes.
2. Une heure plus tard, elle va rencontrer Lucie qui loge au Cabotin.
3. Pendant ce temps, Paule écoute la télévision dans sa chambre, la 538.

Déterminer le nom de l'hôtel et le numéro de chambre de chaque cliente.

a.

Clientes	Jocelyne	Lucie	Paule
Hôtels	Noctambule	Cabotin	Logis
Chambres	419	305	538

b.

Clientes	Jocelyne	Lucie	Paule
Hôtels	Noctambule	Logis	Cabotin
Chambres	419	538	305

c.

Clientes	Jocelyne	Lucie	Paule
Hôtels	Logis	Cabotin	Noctambule
Chambres	419	305	538

d.

Clientes	Jocelyne	Lucie	Paule
Hôtels	Cabotin	Noctambule	Logis
Chambres	419	538	305

Question 7.

Quatre amies discutent de leur lettre préférée et de leur chiffre préféré.

Les prénoms sont : Flore, Joane, Linda, Maria
Les lettres préférées sont : E, F, L, N
Les chiffres préférés sont : 3, 5, 6, 7

1. La lettre préférée de chacune n'est pas dans son prénom.
2. Celle qui préfère la lettre F préfère aussi le chiffre 5.
3. Flore : Mon chiffre préféré n'est ni 3 ni 7.
4. Joane : Mon chiffre préféré n'est pas 3.
5. Linda : Ma lettre préférée n'est pas E.

Trouver la lettre préférée et le chiffre préféré de chacune.

a.

Prénoms	Flore	Joane	Linda	Maria
Lettres	N	L	F	E
Chiffres	6	7	5	3

b.

Prénoms	Flore	Joane	Linda	Maria
Lettres	F	E	N	L
Chiffres	5	3	6	7

c.

Prénoms	Flore	Joane	Linda	Maria
Lettres	**L**	N	E	**F**
Chiffres	7	6	3	5

d.

Prénoms	Flore	Joane	Linda	Maria
Lettres	N	L	F	E
Chiffres	7	5	3	6

Question 8.

Etape 1. D'abord écrivons l'égalité incontestable :
$4–10=9-15$
Etape 2. Ajoutons aux deux membres le même nombre$(5/2)^2$:
$4-10+(5/2)^2=9-15+(5/2)^2$
Etape 3. On peut donc maintenant faire les transformations :
$2^2-2x2x5/2+(5/2)^2=3^2-2x3x5/2+(5/2)^2$
Etape 4. Par identité remarquable on a :
$(2-5/2)^2=(3-5/2)^2$
Etape 5. En extrayant la racine carrée des deux membres de l'égalité on obtient alors :
$2-5/2=3-5/2$
Ce qui donne alors :
$2=3$

Où est l'erreur ?

a. Etape 2
b. Etape 3
c. Etape 4
d. Etape 5

Question 9.

Un maire a été élu au cours d'une élection. Le nombre de candidats est quatre et 6217 personnes ont voté (aucun bulletin blanc ou nul).
Il a eu 25 voix de plus que le deuxième, 40 de plus que le troisième et 70 de plus que le quatrième.

Combien de voix le maire a-t-il obtenu?

a. 1588 voix
b. 1855 voix
c. 2132 voix
d. 3109 voix

Question 10.

Trouver, parmi les solutions proposées, celle qui peut s'intégrer à la fois à l'ensemble vertical et à l'ensemble horizontal.

		ANN		
		TEE		
EFO	UVR	?	JKP	CDV
		SBB		
		PRR		

a. CDA
b. HII
c. ELL
d. EFI

Partie 2 : Questions de spécialité

- Les candidats de Terminale S répondent aux questions 11 à 20
- Les candidats de Terminale STI2D, STL, STAV répondent aux questions 21 à 30
- Les candidats de ES répondent aux questions 31 à 40

Série S : répondre aux questions de 11 à 20

- Les questions sont indépendantes.

Question 11.

On pose $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$ alors

a. $I = -1/e$ b. $I = 1/e$ c. $I = -1/2$ d. $I = 1/2$

Question 12.

L'équation

$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ dans R peut avoir comme solution :

a. $x = \frac{4\pi}{23}$ b. $x = \frac{\pi}{5}$ c. $x = \frac{10\pi}{63}$ d. $x = \frac{10\pi}{67}$

Question 13.

Soit le nombre complexe z=1+i alors

a. $z^{44} = 1$ b. $z^{44} = -2^{22}$ c. $z^{44} = 2^{22}$ d. $z^{44} = -1$

Question 14.

Soit $z^2 + z + 1 = 0$, . Alors

a. -1 est racine de cette équation

b. L'équation admet deux solutions dans R

c. $\frac{i\sqrt{3} - 1}{2}$ est racine de cette équation

d. $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$ est racine de cette équation

Question 15.

Les solutions dans R de l'équation $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ sont

a. $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

b. $\{-1; 2\}$

c. 2

d. $\{-2; 2\}$

Question 16.

La solution de l'équation différentielle $5y' + 3y = 0$ et qui vérifie la condition y(2)=e est

a. $\exp\left(\frac{11}{5} - \frac{3}{5}x\right)$

b. $3\exp\left(\frac{11}{5} - \frac{3}{5}x\right)$

c. $\exp\left(\frac{11}{5} + \frac{3}{5}x\right)$

d. $\exp\left(\frac{11}{5} + \frac{2}{5}x\right)$

Question 17.

Le module de $4i(1+i\sqrt{3})$ est

a. 1 b. 8 c. 4 d. 6

Question 18.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{\ln x}$ pour tout $x > 0$. Alors

a. La dérivée f' de f est définie pour tout $x > 0$ par $f'(x) = 2\frac{\ln x}{x}x^{\ln x}$

b. La fonction f n'est pas dérivable pour x>0

c. La dérivée f' de f est définie pour tout x strictement positif par $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$

d. La dérivée f' de f est définie pour tout x strictement positif par $f'(x) = 2\frac{\ln x}{x}e^x$

Question 19.

Dans C, l'équation $z + \bar{z} = 1 + i$

a. a pour solutions z=0 et z= i

b. a pour solutions z= 0 et z = -1

c. n'admet pas de solution

d. a pour solutions z= 1 et z = i

Question 20.

Avec le mot « NATURE » combien d'anagrammes (mots de 6 lettres n'ayant pas obligatoirement un sens) peut-on former ?

a. 1020 b. 5400 c. 120 d. 720

Série STI2D, STAV, STL : répondre aux questions de 21 à 30

- Les questions sont indépendantes.

Question 21.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

$z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = 10i - 3$. Leur somme est égale à

a. $6-12i$ b. $6+12i$ c. $8i$ d. $-8i$

Question 22.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite géométrique de premier terme 3 et de raison ½ . Alors

a. $u_4 = 3/8$ b. $u_4 = 1/4$ c. $u_4 = 3/4$ d. $u_4 = 9/2$

Question 23.

Soit un jeu de cartes composé de 16 cartes vertes et 16 cartes rouges. On tire successivement 2 cartes. La première carte tirée n'est pas remise dans le jeu.
La probabilité que les deux cartes soient rouges est

a. 7/62 b. 15/62 c. 1/16 d. 1/32

Question 24.

Le produit scalaire des deux vecteurs de coordonnées (1,2,3) et (0,-3,2) est égal à

a. 3 b. 0 c. -3 d. 2

Question 25.

Une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = \cos x - \sin x$ est

a. $F(x) = \cos x + \sin x$

b. $F(x) = -\cos x - \sin x$

c. $F(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{2}$

d. $F(x) = \sin x - \cos x$

Question 26.

Soit l'équation différentielle : $y'+3y=0$ **.**Sachant que k est un nombre réel, la solution de l'équation est :

a. ke^{-4x} b. ke^{-3x} c. ke^{-5x} d. kx

Question 27.

Un nénuphar double sa superficie chaque jour. Si un nénuphar couvre un étang en 8 jours, en combien de jours deux nénuphars le couvrent-ils?

a. 4 jours b. 6 jours c. 7 jours d. 16 jours

Question 28.

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 5e^{2x} - 1$. A-t-on ?

a. f est croissante sur R
b. f est décroissante sur R
c. f est négative sur R
d. f est bornée sur R

Question 29.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 4. A-t-on ?

a. $u_6 = 20$
b. $u_6 = 21$
c. $u_6 = 25$
d. $u_6 = 30$

Question 30.

La valeur moyenne M de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur l'intervalle [0 ; 2]est

a. $M = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
b. $M = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
c. $M = \frac{1}{2}$
d. $M = \frac{-1}{2}$

Série ES : répondre aux questions de 31 à 40

- Les questions sont indépendantes.

Question 31.

L'équation $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$

a. a pour unique solution $x = \ln 2$

b. a pour ensemble de solutions $S = \{\ln 2; \ln 3\}$

c. a pour ensemble de solutions $S = \{2;3\}$

d. n'a pas de solution

Question 32.

A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse M, il a été procédé dans ce pays à une importante campagne de vaccination : 70% des habitants ont été vaccinés. Une étude a révélé que 5% des vaccinés ont été touchés par la maladie, pourcentage qui s'est élevé à 60% chez les non vaccinés.
La probabilité pour qu'un individu ait été vacciné, sachant qu'il a été atteint par la maladie M est égale à

a. 0,215 b. 0,035 c. 7/43 d. 5/43

Question 33.

La fonction réelle f est définie sur Df (domaine de définition) par $f(x) = \dfrac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1}$

Soit f' la fonction dérivée de la fonction f , alors

a. $f'(x) = \dfrac{2e^{x}}{(e^{x} - 1)}$ sur Df

b. $f'(x) = \dfrac{-2e^{x}}{(e^{x} - 1)^2}$ sur Df

c. $f'(x) = \dfrac{-2e^{x}}{(e^{x} + 1)^2}$ sur Df

d. $f'(x) = \dfrac{e^{x}}{(e^{x} + 1)^2}$ sur Df

Question 34.

La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 3 et de variance 16. Alors

a. L'espérance de la variable aléatoire $Y = X - 3$ est égale à 1

b. L'espérance de la variable aléatoire $Y = X - 3$ est égale à 3

c. La variable aléatoire $Y = X - 3$ ne suit pas une loi normale

d. L'espérance de la variable aléatoire $Y = X - 3$ est égale à 0

Question 35.

La limite de $5\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n}$ quand n tend vers $+\infty$ est

a. 0 b. 3/8 c. 15/8 d. $+\infty$

Question 36.

La suite (u_n) définie par $U_0=2$ et $U_{n+1}-U_n-3=0$

a. Est géométrique
b. Est constante
c. Est arithmétique
d. Est telle que $u_1 = 10$

Question 37.

Durant la période des soldes, un produit de la marque M a vu baisser son prix de vente de 30%. Sachant que le prix initial affiché est 40 euros, quel doit être le prix annoncéaprès réduction

a. 24 euros
b. 28 euros
c. 30 euros
d. 32 euros

Question 38.

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite. La probabilité de l'événement suivant « le tirage comporte au moins une fois face » est égale

a. 1/8
b. 3/8
c. 7/8
d. 1/4

Question 39.

Une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{5}x^4 + \frac{1}{x^2}$ est

a. $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{x}$
b. $F(x) = \frac{2}{25}x^5 - \frac{1}{x}$
c. $F(x) = \frac{4}{25}x^5 - \ln(x)$
d. $F(x) = \frac{4}{25}x^5 + \ln(x)$

Question 40.

La valeur moyenne sur l'intervalle $[0, \pi/3]$ de la fonction f donnée par la relation $f(x) = \cos 3x - \sin 3x$ est

a. $-\pi/3$
b. $2/\pi$
c. $-2/\pi$
d. 0

Partie 3 :

Sous-partie 1 : mini- cours

- Lire l'ensemble des éléments ci-dessous avant de répondre aux questions 41 à 60

CONVEXITE ET CONCAVITE

Les notions de convexité et de concavité sont très utilisées dans les modèles financiers et plus généralement en économie.

I. Intervalle de $\mathbf{R}$

Définition.
Soit I une partie non vide de $\mathbf{R}$.
On dit que I est un intervalle si pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tel que $a \leq b$ on a : $[a,b] \subset I$
où $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b\}$.

Remarque
Soit I une partie non vide de $\mathbf{R}$
Pour montrer que I**n'est pas un intervalleil suffit de trouver** $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$ et $[a,b] \not\subset I$

Exemples
1) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, alors :
$]a,+\infty[$; $]-\infty,a[$; $]a,b[$; $[a,b]$; $]a,b]$;$[a,b[$ et $\mathbf{R}$ sont des intervalles.

2) $\mathbf{N}$ n'est pas un intervalle car pour $a = 0$ et $b = 5$; on a $0 \in \mathbf{N}$ et $5 \in \mathbf{N}$
mais $[0,5] \not\subset \mathbf{N}$ puisque $\frac{1}{2} \in [0,5]$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$.
3) $A =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ n'est pas un intervalle car pour $a = -1$ et $b = 2$;
on a $-1 \in A$ et $2 \in A$ mais $[-1,2] \not\subset A$ puisque $0 \in [-1,2]$ et $0 \notin A$

II. Fonction convexe, fonction concave

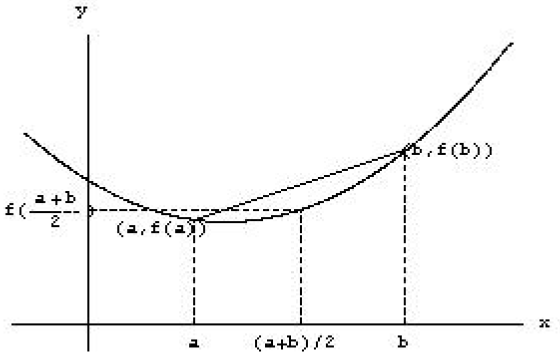
Définition (convexe, concave)
Une fonction numérique f est dite **convexe** sur un intervalle I si elle vérifie :

Pour tout $x \in I$, $y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a : $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Une fonction f est dite **concave** sur I si $-f$ est une fonction convexe sur I
c'est-à-dire si f vérifie:
Pour tout $x \in I$, $y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a : $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Remarque.

D'après la définition d'une fonction convexe f, on peut dire que pour tout a *et* b de I, **la corde** $[A,B]$ de $\mathbf{R}^2$, où $A=(a,\,f(a))$ et $B=(b,\,f(b))$, est située **au-dessus de la courbe représentative de lafonction** f (voir figure ci-dessous)



Exemples

1) La fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par : pour tout $x\in\mathbf{R},\ f(x)=x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$

En effet, soient $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ et $\lambda\in[0,1]$ on a :

$(\lambda x+(1-\lambda)y)^2=\lambda^2x^2+2\lambda(1-\lambda)xy+(1-\lambda)^2y^2$ d'où

$$\begin{aligned}(\lambda x+(1-\lambda)y)^2-(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2)&=(\lambda^2-\lambda)x^2+2\lambda(1-\lambda)xy+((1-\lambda)^2-(1-\lambda))y^2\\&=\lambda(\lambda-1)x^2+2\lambda(1-\lambda)xy+\lambda(\lambda-1)y^2\\&=\lambda(\lambda-1)(x^2-2xy+y^2)\\&=\lambda(\lambda-1)(x-y)^2\end{aligned}$$

De plus $\lambda(\lambda-1)(x-y)^2\le 0$ car $\lambda\in[0,1]$ d'où $(\lambda x+(1-\lambda)y)^2-(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2)\le 0$

<u>Conclusion</u> : Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$ on a :

$(\lambda x+(1-\lambda)y)^2\le\lambda x^2+(1-\lambda)y^2$ c'est-à-dire $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

Donc f est convexe sur $\mathbf{R}$

En particulier : Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\left(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}\right)^2\le\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2$

2) La fonction $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ définie par : pour tout $x\in\mathbf{R}^+,\ f(x)=\sqrt{x}$ est concave sur $\mathbf{R}^+$.

Car pour tout $(x,y)\in(\mathbf{R}^+)^2$ et $\lambda\in[0,1]$, si on remplace x par $\sqrt{x}$ et y par $\sqrt{y}$ dans $(\lambda x+(1-\lambda)y)^2\le\lambda x^2+(1-\lambda)y^2$ alors :

Pour tout $(x,y)\in(\mathbf{R}^+)^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$ on a : $\sqrt{\lambda x+(1-\lambda)y}\ge\lambda\sqrt{x}+(1-\lambda)\sqrt{y}$

En particulier pour tout $(x,y)\in(\mathbf{R}^+)^2$, $\sqrt{\frac{x+y}{2}}\ge\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$

3) La fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par : pour tout $x\in\mathbf{R},\ f(x)=|x|$ est convexe sur $\mathbf{R}$.

Car pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$ on a : $|\lambda x+(1-\lambda)y|\le\lambda|x|+(1-\lambda)|y|$

En effet $|\lambda x+(1-\lambda)y| \leq |\lambda x|+|(1-\lambda)y|$ car pour tout $(a,b)\in \mathbf{R}^2$, $|a+b| \leq |a|+|b|$

de plus $|\lambda x| = |\lambda| \times |x| = \lambda |x|$ et $|(1-\lambda)y| = |(1-\lambda)| \times |y| = (1-\lambda)|y|$ car $\lambda \in [0,1]$

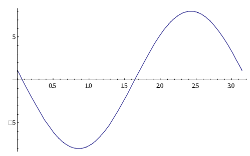
d'où $|\lambda x+(1-\lambda)y| \leq \lambda |x| + (1-\lambda)|y|$.

4) Pour tout réel c fixé, la fonction constante $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :
pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = c$ est convexe et concave sur $\mathbf{R}$.
Car pour tout $(x,y)\in \mathbf{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :
$f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) = c = \lambda\, c + (1-\lambda)\, c = \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$
D'où $f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \leq \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$ et $f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \geq \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$

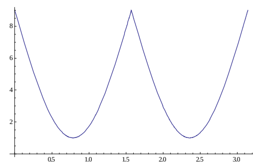
5) Toute fonction affine $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = a\,x + b$ où $(a,b)\in \mathbf{R}^2$ est convexe et concave sur $\mathbf{R}$.

Remarques

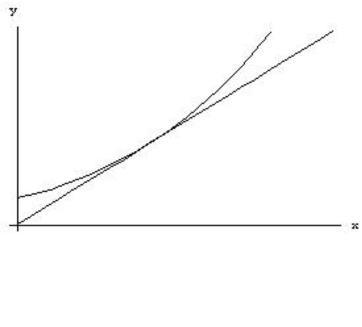
1) Il existe une fonction f convexe sur I_1 et concave sur I_2 mais f n'est pas convexe sur $I_1 \cup I_2$ et f n'est pas concave sur $I_1 \cup I_2$ (cf. figure)



2) Si une fonction f est convexe sur I_1 et aussi convexe sur I_2 **ceci n'implique pas** que f est convexe sur $I_1 \cup I_2$ (cf. figure)



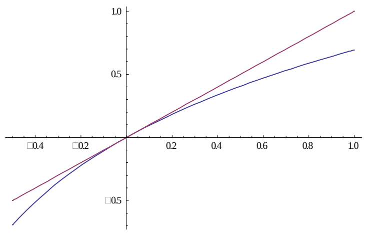
Proposition
Si f est une fonction dérivable et **convexe sur <u>un intervalle</u>** I de $\mathbf{R}$, alors toute tangente à sa courbe représentative est **située en dessous de celle-ci**,
c'est-à-dire :
Pour chaque x_0 de I, on a : pour tout $x \in I$, $f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) \leq f(x)$



Proposition

Si f est une fonction dérivable et **concave sur un <u>intervalle</u>** I de $\mathbf{R}$, alors toute tangente à sa courbe représentative est **située au dessusde celle-ci**, c'est-à-dire :

Pour chaque x_0 de I, on a : pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$



Exemples

1) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = x^2$ est **convexe** sur $\mathbf{R}$ et l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A = (1,1)$ est donnée par :
$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ c'est-à-dire $y = 1 + 2(x-1)$
D'où pour tout $x \in \mathbf{R},\ 1 + 2(x-1) \leq x^2$

2) La fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = Ln(1+x)$ est **concave**sur $]-1,+\infty[$.
$y = x$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A = (0,0)$, on a alors pour tout $x \in]-1,+\infty[,\ Ln(1+x) \leq x$

Théorème

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I, on a :
1) f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$
2) f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$

Grâce à ce dernier résultat, on peut désormais facilement vérifier si une fonction est convexe et/ou concave:

Exemples

1) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par: pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
Car pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = 2$ d'où $f''(x) \geq 0$

2) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
Car pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = e^x$ d'où $f''(x) \geq 0$

3) La fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par : pour tout $x \in]0,+\infty[,\ f(x) = Ln(x)$ est concave sur $]0,+\infty[$.
Car pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ d'où $f''(x) \leq 0$

Sous-partie 2 : 20 questions à traiter par tous les candidats

- Les questions sont indépendantes
- Chaque exercice est composé d'une ou de plusieurs questions

Exercice 1.

Question 41.

$\{0,1\}$ est un intervalle

a. vrai b. faux

Question 42.

$]-1,0[\cup[0,3]$ est un intervalle

a. vrai b. faux

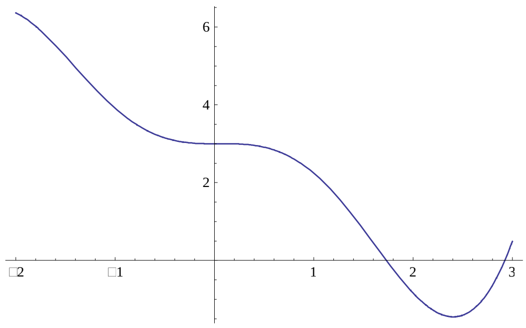
Question 43.

Si I est un intervalle et J est un intervalle alors $I \cup J$ est un intervalle

a. vrai b. faux

Exercice 2.

On considère le graphe de la fonction f



Question 44.

a. f est convexe sur $]-2\ ,\ 3[$

b. f est convexe sur $]-2\ ,\ 1[$

c. f est convexe sur $]\,0\ ,\ 1\,[$

d. f est convexe sur $]\,2\ ,\ 3\,[$

Exercice 3.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$.

Question 45.

Si f n'est pas convexe sur $\mathbf{R}$ alors f est concave sur $\mathbf{R}$.

a. vrai b. faux

Question 46.

Si f est convexe sur $]1\ ,\ 2[$ et f est convexe sur $[2\ ,\ 5[$,
alors f est convexe sur $]1\ ,\ 5[$

a. vrai

b. faux

Question 47.

Si f est convexe sur $\mathbf{R}$ et g est convexe sur $\mathbf{R}$ alors $(g+f)$ est convexe sur $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 48.

Si f est concave sur $\mathbf{R}$ et g est concave sur $\mathbf{R}$ alors $(g\times f)$ est concave sur $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 49.

Si f est concave sur $\mathbf{R}$ et g est convexe sur $\mathbf{R}$ alors $(f\circ g)$ est concave sur $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Question 50.

Si pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=-1$,
alors f est convexe sur $\mathbf{R}$

a. vrai

b. faux

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=12+2x^2-x^4$

Question 51.

a. f est convexe sur $]-2\ ,\ 1[$

b. f est convexe sur $]1\ ,\ +\infty[$

c. f est concave sur $\left]\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\ ,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$

d. f est concave sur $]4\ ,\ +\infty[$

Question 52.

a. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]-2\ ,\ 1\right[\right)^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$,
$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\geq \lambda\, f(x)+(1-\lambda)\, f(y)$

b. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]-1\ ,\ +\infty\right[\right)^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$,
$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\geq \lambda\, f(x)+(1-\lambda)\, f(y)$

c. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]\frac{-\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\right)^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$,
$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\geq \lambda\, f(x)+(1-\lambda)\, f(y)$

d. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]4\ ,\ +\infty\right[\right)^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$,
$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\geq \lambda\, f(x)+(1-\lambda)\, f(y)$

Exercice 5

Question 53.

a. Pour tout $(x,y)\in\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)^2$, $\cos(\frac{2x+y}{3})=\cos(\frac{2x}{3})+\cos(\frac{y}{3})$

b. Pour tout $(x,y)\in\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)^2$, $\cos(\frac{2x+y}{3})=\cos(\frac{2x}{3})-\cos(\frac{y}{3})$

c. Pour tout $(x,y)\in\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)^2$, $\cos(\frac{2x+y}{3})\leq\frac{2\cos(x)+\cos(y)}{3}$

d. Pour tout $(x,y)\in\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)^2$, $\cos(\frac{2x+y}{3})\geq\frac{2\cos(x)+\cos(y)}{3}$

Exercice 6.

Question 54.

a. Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\left|\frac{x+y-2}{2}\right|\leq\left|\frac{x}{2}-1\right|+\left|\frac{y}{2}-1\right|$

b. Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\left|\frac{x+y-2}{2}\right|\geq\left|\frac{x}{2}-1\right|+\left|\frac{y}{2}-1\right|$

c. Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\left|\frac{x+y-2}{2}\right|\leq\frac{|x-1|+|y-1|}{2}$

d. Pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\left|\frac{x+y-2}{2}\right|\geq\frac{|x-1|+|y-1|}{2}$

Exercice 7.

Question 55.

a. Pour tout $(x,y)\in \mathbf{R}^2$, $(1+\frac{x+y}{2})^2 \leq (1+\frac{x}{2})^2+(1+\frac{y}{2})^2$

b. Pour tout $(x,y)\in \mathbf{R}^2$, $(1+\frac{x+y}{2})^2 \geq (1+\frac{x}{2})^2+(1+\frac{y}{2})^2$

c. Pour tout $(x,y)\in \mathbf{R}^2$, $(1+\frac{x+y}{2})^2 \leq \frac{(1+x)^2+(1+y)^2}{2}$

d. Pour tout $(x,y)\in \mathbf{R}^2$, $(1+\frac{x+y}{2})^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

Exercice 8.

Question 56.

a. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)^2$, $\sin(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}) \leq \frac{\sin(x)}{3}+\frac{2\sin(y)}{3}$

b. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)^2$, $\sin(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}) \geq \frac{\sin(x)}{3}+\frac{2\sin(y)}{3}$

c. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)^2$, $\sin(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}) = \sin(\frac{x}{3})-\sin(\frac{2y}{3})$

d. Pour tout $(x,y)\in \left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)^2$, $\sin(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}) = \sin(\frac{x}{3})+\sin(\frac{2y}{3})$

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=x(x^2+1)$

Question 57.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(-1,-2)$ est

a. $y=x-2$ b. $y=4x+2$ c. $y=4x-6$ d. $y=x-1$

Question 58.

En étudiant la convexité et/ou la concavité de la fonction f, on a :

a. Pour tout $x\in\mathbf{R}$, $x^3\geq 3x+2$

b. Pour tout $x\in \left]-\infty,0\right[$, $x^3\leq 3x+2$

c. Pour tout $x\in \left]-2,+\infty\right[$, $x^3\geq 3x+2$

d. Pour tout $x\in \left]-1,2\right[$, $x^3\geq 3x-6$

Exercice 10.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x.e^x$

Question 59.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(1, e)$ est

a. $y = e(2x-1)$ b. $y = (2x-1)$ c. $y = e(2x+1)$ d. $y = x$

Question 60.

En étudiant la convexité et/ou la concavité de la fonction f, on a :

a. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xe^x \geq e(2x-1)$

b. Pour tout $x \in \left]-\infty, -2\right[$, $xe^x \geq e(2x-1)$

c. Pour tout $x \in \left]-2, +\infty\right[$, $xe^x \geq e(2x-1)$

d. Pour tout $x \in \left]-3, 2\right[$, $xe^x \geq e(2x-1)$

FIN DE L'EPREUVE